TI89 を用いた探究活動
— 実践報告・その効果と反省点 —

石川工業高等専門学校
阿蘇和寿

筆者は数学の授業にさまざまな探究活動を取り入れる試みを行っている。（本紙, 『Grapes を用いた探究活動』参照。）

ここでは, 本校の機械工学科と建築学科の第 1 学年の学生 (各 40 名程度) を対象に, 本年度の 4 月からいままでに行った探究活動の実践報告として, その効果や反省点を述べ, 今後の探究活動の資料に供したい。

まず, 本報告の概要を述べる。

(1) 第 1 節の『パスカルの三角形』, ならびに第 2 節の『２次関数のグラフの探究 (1)』は, 数式処理電卓を始めとするテクノロジーを一切用いていない。本校では第 1 学年の適当な時期に TI-89 の貸与を開始するが, これら 2 つの探究は貸与以前のものである。行ったのはともに 4 月, 入学して間もなくの時期である。授業の最後にテーマを与え, 各自考えてくるように申し渡し, 次の時間に口頭発表させたものである。それぞれの探究結果をみると, 学生たちの探究に対する資質の高さ, 数学に対する探求心などが分かると思う。

(2) 第 3 節の『２次関数のグラフの謎』は, 同じ探究 (1) に引き続いて行われた 2 次関数のグラフの探究における発見を鑑賞したあと, いくつかのテーマを謎として提示した。この学生たちは 9 月には, グラフの平行移動, 対称変換, 拡大縮小などを学ぶ予定となっており, その時点で彼らの発見した事柄を証明することができると考えている。しかし, そのときの動機付けのためであるならば, この探究活動は夏休みの課題として行う方法もあったかと思われる。

(3) 第 4 節の『3 次関数の探究』は, 提出されたレポートを採点しようという意図を持って行った。これは次の観点からの 10 点満点で, このことは事前に説明しておいた。
   - テーマがはっきり示されている [1]。
   - どんな方法で調査をして, 何を調べたいかが的確であり, それがきちんと述べられている [2]。
   - 調べたデータが正確に必要なだけ提示されている [2]。
   - 探究結果の考察が正確でオリジナリティがある [2]。
   - 感想が述べられている [1]。
   - 予想以上にすごいレポートである [2]。

1　パスカルの三角形

探究 1 0 以上の整数 n に対して, $(a+b)^n$ の展開式して a について降べきの順に並べると次のようになる。

$$\begin{array}{ll} (a+b)^0 = 1 & 1 \\ (a+b)^1 = a+b & 1\quad 1 \\ (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 & 1\quad 2\quad 1 \\ (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \end{array}$$

右側に書いたのはその係数だけを取り出したものである。これらの係数を二項係数といい, 二項係数の作る三角形を “パスカルの三角形” という。するとパスカルの三角形は次のようになることが分かる。

$$\begin{array}{lcccccccc} ⓪ & \cdots & & & & 1 & & & \\ ① & \cdots & & & 1 & & 1 & & \\ ② & \cdots & & 1 & & 2 & & 1 & \\ ③ & \cdots & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

左側の数字は展開式のべき数を表していて, たとえば ③ の行は $(a+b)^3$ を展開したときの二項係数の作る行を表している。この行を (実際には 4 行目であるが) 第 3 行と呼ぶことにする。

以上のような式の展開は次のように行うのが便利である。右は係数だけを取り出したものである。

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & a^2 & + & 2ab & + & b^2 \\ \times) & & & & a & + & b \\ \hline & & a^2b & + & 2ab^2 & + & b^3 \\ a^3 & + & 2a^2b & + & ab^2 & & \\ \hline a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

さらにパスカルの三角形をこれに続けて第 10 行目まで計算し, 気づくところを述べよ。

1.1 (探究の結果) 結果発表を示す。組合せの記号は教えていないが, それを用いて探究の結果を表現するとすばらしい発見であることとが分かる。

(1) 行が 1 つ増えると係数の個数は 1 つだけ増える。

(2) 第 n 行の左右から 2 番目の数は n である。

$${}_n\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = n$$

(3) 隣り合う 2 つの数を加えるとその下にある数に等しい。

$${}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{C}_k$$

(4) 左右対称である。

$${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$$

(5) 第 0 行を除くと, 中央の数はすべて偶数である。

(6) 第 k 行の係数を合計は 2^k に等しい。

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n $$

2　2 次関数のグラフの探究

探究 2 a, b, c を定数とするとき,

$$ y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0) $$

の形の関数を 2 次関数という。次の 2 次関数のグラフを描き, この関数のグラフの特徴として気づいたことを挙げよ。

$$ y = x^2 + x $$

(x 軸を 0.2 刻みに $-2 \leqq x \leqq 2$ まで記入できるグラフ用紙を与え, それを完成させてから特徴の調べるように指示。使えるのは普通の電卓。グラフ用紙は略)

2.1 (2 次関数のグラフの探究結果) 無作為に指名して口頭発表をさせたところ, 次のような意見が出た。

(1) 頂点を対称に左右対称である。

(2) 頂点が原点ではない。頂点の x 座標は -0.5 である。

(3) 必ずしも $y \geqq 0$ ではない。

(4) $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に -0.5, y 軸方向に -0.25 だけ平行移動したものである。

(5) 頂点から離れるにつれてプロットの間隔が広くなっていく。

(6) 原点を通る。

(7) 思いもよらないグラフになった。

頂点の x 座標が -0.5 であるということに対する理由を尋ねたところ,

> $x = -0.4$ のときと $x = -0.6$ のときの y の値が同じだから。

という答えが返ってきた。そこから発展して,

> では $x = 0$ のときと $x = -1$ のときはともに y の値は 0 である。これからも頂点の x 座標が -0.5 であることが分かるでしょう。

というように導き, 一般の 2 次関数を

$$ ax^2 + bx + c = ax\left(x - \frac{b}{a}\right) + c $$

と変形すれば, $x=0$ のときと $x=-\dfrac{b}{2a}$ のときの y の値が同じだから, 頂点の x 座標 p は

$$p=-\frac{b}{2a} \qquad (y \text{ 座標はこれを } x \text{ に代入して求める})$$

であることへと結論づけた。もちろん, 平方完成は重要な式変形であり, 授業ではそれも教えたが, 2 次関数のグラフを分かりやすく教えるための方法のひとつであろう。また学生達自身の発見から即座に頂点の座標を求める方法にたどり着くということも学生たちへのインパクトが期待できよう。

3　2 次関数のグラフの謎

学生たちが 2 次関数の探究において発見した結果をまとめ, それを「2 次関数の謎」として提示した。どんな発見があったかはおよそ想像がつくであろう。ここでは 2 次関数の授業ですでに学んでいるもの (軸との位置関係や交点の座標に関するもの) は除いてある。

Q 1 (グラフの形) グラフの形は a によって決まる。すなわち, $y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフと合同である。これはなぜか。

Q 2 (x^2 の係数) a の値は $y=ax^2$ のグラフのどこに反映されているか。話を簡単にするため $a>0$ の場合だけを考えよう。$y=x^2$ と $y=ax^2$ のグラフの形の違いを a を用いて表現せよ。

Q 3 (下に凸, 上に凸) $y=ax^2$ のグラフは次の性質を持つ。

(1) $a>0$ ならば下に凸

(2) $a<0$ ならば上に凸

この理由を説明せよ。そもそも “下に凸”, “上に凸” とはどういうことなのかを考えなければならない。

Q 4 (自分自身との対称性) $y=ax^2$ のグラフは y 軸について対称である。この理由を説明せよ。

Q 5 (他のグラフとの対称性) 2 次関数の対称性について次のことが指摘された。それぞれの理由を説明せよ。

(1) $y=x^2+bx$ と $y=x^2-bx$ のグラフは y 軸について対称である。

(2) $y=ax^2+x$ と $y=-ax^2+x$ のグラフは原点について対称である。

(3) $y=x^2+x$ と $y=-x^2-x$ のグラフは x 軸について対称である。

Q 6 (対称なグラフの方程式) 上の問題は次のように発展するであろう。すなわち, “$y=ax^2+bx+c$ のグラフと次のように対称なグラフの方程式はどのようなものであろうか ?”

(1) y 軸について対称

(2) 原点について対称

(3) x 軸について対称

Q 7 (グラフの平行移動) 2 次式の基本変形

$$ax^2 + bx + c = a(x-p)^2 + q$$

を行う方法はすでに学んだ。これについて次のことが成り立つ。この理由を説明せよ。

- $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

Q 8 (グラフの接線) 次のことは大発見である。

- $y = ax^2 + x + 1$ のグラフはすべて $y = x + 1$ に接する。

これを一般化した法則を考え, それを確かめてみよ。

4　3 次関数の探究から

探究 3 /3 次関数

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0,\ b,\ c,\ d \text{ は定数})$$

のグラフについて探究せよ。3 次関数の形としては, たとえば

$$y = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma), \qquad y = a(x-p)^3$$

などのバリエーションが考えられる。

鑑賞の時間には「どんなタイプの関数についての探究があったか」ということを説明し, その中から「よいレポートとして評価したものとその理由」として, 次の文章を示した。このような試みを行ったのは, 採点による不公平感をなくすと同時に, 今後の発表方法への指針になると考えたからである。なお, 各得点のレポート数は, 8 点 1, 7 点 2, 6 点 16, 5 点 14, 4 点 4 である。共同作業を許したため, 学生数よりはレポート件数が少なくなっている。

4.1 (Best Report) 今回の探究で Best Report に選ばれたのは次の 3 編である。

(1) $y = (x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$ の探究

- 得点 8
- 同じ形のグラフを探究したものは 3 編あったが, このレポートは調べる観点が次の 3 点にわたり, 的確な探究の方針を選んだといえる。
  1. ① このグラフと x 軸との交点について
  2. ② α, β, γ がすべて異なるとき, 2 つだけが同じ場合, 3 つとも同じ場合に分類し, それぞれの場合に x 軸との交わり方について
  3. ③ 頂点の x 軸からの距離について

- グラフも丁寧に豊富に描かれていて, 結果の考察も正確であったため, 探究の方針, データの提示, 結果の考察の 3 部門で 2 点を獲得したものである。

(2) $y = ax^3 + ax$ の探究

- 得点 7
- これも同じ形のグラフを探究したものは 4 編あった。しかし, このレポートは次の点で他のものより勝っていた。

  ① このグラフは点 $(0, 0)$ と $(-1, 0)$ で x 軸と交わるが, 区間 $[-1, 0]$ における y の最大値について調べた。その結果は, y が最大となるのは次の点であると分かった。

$$(-0.666..., \ \ 0.148148...a)$$

  ② よく似た考察を行ったレポートはもう一つあったが, このレポートはグラフが丁寧に描いてあり, 感想の部分も, 調べたときの気持ちがよく伝わってくるものであった。感想は 1 点満点だが, 感想自体が考察といえる内容があった。

(3) $y = ax^3, \ \ y = x^3 + bx^2, \ \ y = x^3 + cx, \ \ y = x^3 + d$

- 得点 7
- このレポートはいわば 4 種類のレポートをあわせた感じである。それぞれのグラフと $y = x^3$ のグラフとの比較を行っている。これを 4 つに分けたならば, それらに匹敵するレポートは多くあった。このレポートが高得点であった理由は次の通りである。

  ① 4 つの考察ともシンプルで, 何を探究したいかが明確である。結果の考察も必要なことを簡潔にまとめてあると判断した。

  ② 4 つともグラフがきちんと必要な特徴を捉えて描かれていた。

最後に (2) の探究を行った 2 名の感想を紹介しておく。探究活動が証明への動機付けになりうることを示していると言っていいと思う。

- 今回の探究で最大値が割り切れない数字になったのが不思議に感じた。なぜ $-0.666...$ や $0.148148...$ 等の数字が出てくるのかを, できるならば調べてみたかった。これから証明できるように少しずついろいろと覚えていきたいと思う。
- 最大値 (の x 座標) は -0.5 になると思っていたけど, $-0.666...$ になり, 何故そうなるかを証明したかった。