

Algebra I の Activity を使う work shop

清風高等学校 公庄庸三

2002 年 8 月 25 日

複雑な式は、それをそのまま覚えようとするのが困難です。しかしいくら複雑な式でも式の中に「規則」があれば、その規則を覚えることによって、式全体を簡単に覚えることができるのです。

課題 1. $(a + b)^n$ (ただし $n = 1, 2, 3, \dots$) を展開した多項式には、たくさんの項が含まれます。

[1] 項の個数になにか規則がないかを考えなさい。

[2] [1] で考えたすべての項には、何か規則的な特徴がないかを考えなさい。

[3] 二項係数には規則的な特徴がないかを考えなさい。

Activity 1. technology では、式の展開はつぎのようにすればできます。

◇ **Home** で白い計算用紙を用意する。

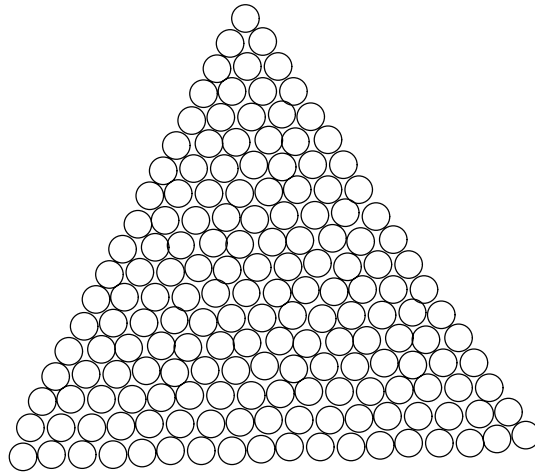
F2 の Expand を押せば、Expand(と表示される。このあとに展開したい式を入力して、最後に) をつけて、**enter** を押すと、式が展開されて表示される。

課題??で君が見つけた規則や特徴は n が大きな数であっても成り立っているかを調べなさい。

指導上の留意点 1. 数学は「特殊」から「一般」への拡張が重要である。手計算で $(a + b)^7$ までさせて、特殊を発見させ、それを technology を使って、さらに大きな n まで確かめさせる。つまり特殊から一般への橋渡しを technology は担うことができるという例である。

この三角形の中には、もっと不思議なことが隠されています。

課題 2. パスカルの三角形で、各数値を $(\text{mod } 3)$ で分類し、0 を代表とするクラスの数には「赤色」、1 を代表とするクラスの数には「青色」、2 を代表とするクラスの数には「緑色」(色にはこだわりませんから、とにかく 3 色) をぬりましょう。



課題 3. 4 色の色を用意し，パスカルの三角形で，各数値を $(\text{mod } 4)$ で分類し，同じクラスの数には同じ色をぬってみましょう。展開には technology を使いなさい。

指導上の留意点 2. 無味乾燥だと思いがちな展開の係数に，すばらしい芸術作品が仕組まれているということは，まさに神の仕組んだ秘密の文様でしょう。ここも驚きを体験させることが狙いである。これはフラクタルとも関連のある文様です。

課題 4. A, B を文字 x の多項式とすると， $A \div B$ の商とあまりについて次のことを考えなさい。

- [1] A が 2 次式で， B が 1 次式のとき，商の次数とあまりの次数はいくらでしょう。
- [2] A が 3 次式で， B が 1 次式のとき，商の次数とあまりの次数はいくらでしょう。
- [3] A が 3 次式で， B が 2 次式のとき，商の次数とあまりの次数はいくらでしょう。
- [4] A が n 次式で， B が m 次式のとき，商の次数とあまりの次数はいくらでしょう。ただし n, m は自然数で $n > m$ とする。
- [5] A が n 次式で， B も n 次式のとき，商の次数とあまりの次数はいくらでしょう。ただし n は自然数とする。

指導上の留意点 3. 商も余りも多項式になるようにする。ここから余りについての次数の制約がうまれることを強調する。

Activity 2. technology でこのようなわり算を行うには次のようにします。

◇ **Home** で白い紙を用意する。

F2 で **propFrac** を選ぶと, **propFrac(** と表示される。そのあと, 例えば $(x^2 + 5x - 3) \div (x + 1)$ と入力し, 最後に **)** を入れて **enter** を押すと結果が画面にでる。

この画面に現れる結果と, 手計算で $(x^2 + 5x - 3) \div (x + 1)$ を行った結果を比較し, technology が計算した画面表示の意味を考えなさい。

Activity 3. technology を使って因数分解するには次のようにします。◇ **Home** で **F2** の **Factor** を選び **enter** を押すと, **Factor(** と表示される。このあとに $x^2 + 3x + 2$ と入力し **enter** を押すと, 因数分解された結果が表示される。

課題??, 課題??を technology で行い, 結果を確認しなさい。

次に, 自分で好きな 2 次式を入力して, 因数分解される様子を観察し, 何か気がつくことがあればそれを発表しなさい。

指導上の留意点 4. どのような 2 次式も今までの方法で因数分解できるのではない。TI-92 は **factor(式)** **enter** では, たすき掛けで分解できる式しか因数分解しない。人間と同じである。したがってここでは, 因数分解できない 2 次式があるということに気がつけばよい。これまでの教科書では, 問題はすべて因数分解できる式しか載っていない。

課題 5. $x^3 - 107x^2 - 2668x + 361760$ を次の一次式で割って割り切れるかどうかを調べなさい。

(手計算で行うこと)

[1] $(x + 4)$

[2] $(x + 5)$

[3] $(x + 6)$

[4] $(x + 7)$

[5] $(x + 8)$

[6] $(x + 9)$

[7] $(x + 10)$

素因数分解のように, $x + 2, x + 3, x + 5, x + 7, x + 11$ ととびとびに割っていくのは駄目なのでしょうか?理由を考えなさい。

Activity 4. technology を使って $x + n$ (ただし $n = 11, 12, 13, \dots$) で割り切れるかを調べ, 初めて割り切れる n の値を求めなさい。

n の値がわかったら, その結果を利用して, $x^3 - 107x^2 - 2668x + 361760$ を因数分解しなさい。

Activity 5. $x^3 - 107x^2 - 2668x + 361760$ の x にいろいろな値を代入してみよう。
 ◇ **[Home]**を開き, $x^3 - 107x^2 - 2668x + 361760$ を入力し, この後に **[2nd][K]**を押すと「但し書き」を入れることができるので, ここに $x = -4$ と入力し, **[enter]**を押すと, $x^3 - 107x^2 - 2668x + 361760$ の x に -4 を代入した値が表示される。
 さらに $x = -5, x = -6, x = -7, x = -8, x = -9, x = -10$ を代入した値を調べなさい。
 この結果と課題 5 の君の計算結果と比べなさい。何か気がつきませんか。

指導上の留意点 5. 実際に手計算で求めた余りと, technology で数値を代入した値が同じである。この驚きを大切にしたい。

Activity 6. $x^n - 1$ (ただし $n = 2, 3, 4, 5, \dots, 24, 25, 26 \dots 30$) までの因数分解をさせ, これらの分解の結果を観察し, 何か気のつく性質などがあればまとめなさい。さらにその性質はもっと大きな n に対しても成り立っているのかを調べなさい。

指導上の留意点 6. この activity だけで最低 2 時間は楽しめるでしょう。しかも教師も知らない, 証明したことのない定理が見つかります。過去の授業で実際に生徒が見つけた一例を挙げておきましょう。(注) 間違っている性質もあります。

- [1] n が素数のときは, 必ず括弧は 2 つである。
- [2] 一番最初には必ず $(x - 1)$ がある。
- [3] n が素数の場合, $(x - 1)$ にかける片方の括弧の x の最初の乗数は $n - 1$ であり, 後は $n - 2, n - 3$ と乗数が減る。最後に定数項 1 が必ずくる。
- [4] n に, 素数の倍数を代入すると, その素数を代入したときの因数分解の答えの $(x - 1)$ にかけるもう片方の因数が必ずくる。
- [5] n が偶数のときには, $(x - 1)(x + 1)$ が必ずある。
- [6] n が 3 の倍数のときは, $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ が必ずある。
- [7] n が素数のときは, $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$ に必ずなる。
- [8] n が 4 の倍数のときは, $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ が必ずある。
- [9] n が 5 の倍数のときは, $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ が必ずある。
- [10] n が 6 の倍数のときは, $(x^2 - x + 1)$ も必ずある。

- [11] $x^n - 1 = (x - 1)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$ である。
- [12] $x^{3^n} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \cdots (x^a + x^b + 1^c)$ とすると ,
 $x^{3^{n+1}} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \cdots (x^a + x^b + 1^c)(x^{3a} + x^{3b} + 1^{3c})$ になる。
- [13] 括弧内に $-$ の符号があるときは , $-, +, -, +$ という順番になる。
- [14] $x^{4n+2} - 1$ のときは , 符号を気にしなければ , 同じ形のものが 2 組つつある。
- [15] $x^{2^n} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \cdots (x^{2^{n-1}} + 1)$ になる。
- [16] この機械では $x^{65535} - 1$ までしか因数分解できない。
- [17] $x^n - 1$ の因数分解で $(x - 1)$ 以外のすべての項を展開すると , すべて $(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$ になったので , 必ず $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$ になる。
- [18] $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$ を証明する。
 右辺 $= x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 1$
 $= x^n - 1 =$ 左辺
- [19] $x^{2n} - 1 = (x^n - 1)(x^n + 1)$
- [20] $x^{3n} - 1 = (x^n - 1)(x^{2n} + x^n + 1)$
- [21] n が何かの倍数のとき , 同じ括弧がある。
- [22] n が素数のとき , $(x - 1)$ の後ろの括弧の中がきれい。
- [23] $x^{6 \cdot 3^{n-1}} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \cdots (x^{6 \cdot 3^{n-2}} + x^{3 \cdot 3^{n-2}} + 1)(x^{6 \cdot 3^{n-2}} - x^{3 \cdot 3^{n-2}} + 1)$
- [24] p が素数のとき , $x^{2^p} - 1 = (x - 1)(x + 1) \cdots (x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1)(x^{p-1} - x^{p-2} + \cdots + 1)$
- [25] n の約数を m とするとき , $x^n - 1$ の因数分解の因数には , $x^m - 1$ の因数分解と同じものが含まれている。
- [26] $x^n - 1$ の因数分解の各因数の最初の乗数の和は n に等しい。
- [27] $x^n - 1$ の因数分解の一番乗数の大きい因数を見ると , n が $2, 4, 8, 16$ となるにつれて $1, 2, 4, 8$ となる。また n が $3, 9, 27$ となるにつれて $2, 6, 18$ となる。
- [28] $x^n - 1$ で $n = \boxed{3}$ から , n を $\boxed{3}$ 倍するにつれ , 今までの値に括弧が 1 つずつ増えていき , 1 つ前の括弧から , 各値が $\boxed{3}$ 乗したものが増えた。またこれは $(x - 1)$ 以外すべての括弧の中に $\boxed{3}$ 項ずつ入っている。ちなみに $n = \boxed{2}$ からだと , $\boxed{2}$ 倍していくにつれ , $\boxed{2}$ 乗したものが増え , 括弧の中に $\boxed{2}$ ずつ入っている。この法則は n が素数のときに成り立つ。

[29] すべて $x - 1$ で割りきれれる。

[30] n が偶数のとき $(x - 1)(x + 1)$ で割りきれれる。

[31] $n = p^m$ (p が素数) のときは規則的な形になる。その規則は

- (1) $(x - 1)$ の後ろの括弧は m 個
- (2) $(x - 1)$ の後ろの括弧の中は p 個
- (3) $(x - 1)$ の後ろの括弧はその前の括弧のそれぞれの数を p 倍したものが入る

[32] 分解された括弧の数は, n の約数の個数と同じである。

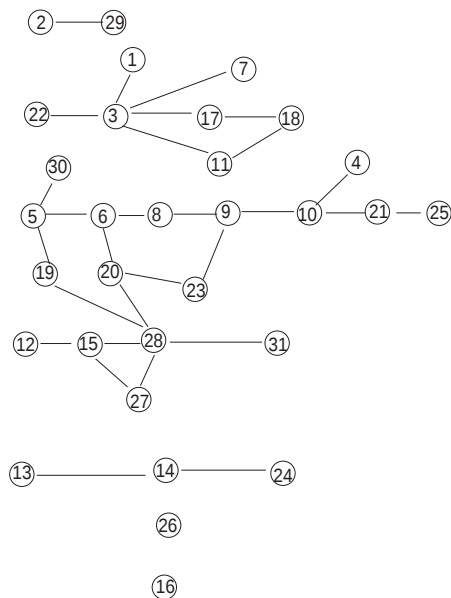


図 1:

Activity 7. $x^4 - n$ が整式の積に因数分解できるのは, n がどのような自然数のときであるかを technology で調べなさい。

Activity 8. $x^4 + n$ が整式の積に因数分解できるのは, n がどのような自然数のときであるかを technology で調べなさい。

Activity 9. $x^2 + n$ が整式の積に因数分解できるのは, n がどのような自然数のときであるかを technology で調べなさい。

指導上の留意点 7. 最後の 4 つの activity は technology と頭脳をフル回転させて楽しむ数学である。もちろんたいいの生徒は調べた結果が正しいことを何らかの形で証明しようとする。証明しなさいと言われなくても証明したくなる。これが本当の数学である。

