Calculus I の Activity を使う work shop

清風高等学校　公庄庸三

2002 年 8 月 24 日

課題 1. 次の関数 $y = f(x)$ のグラフを描いてみよう。x は -5 から 5 まで，1 刻みで調べなさい。

[**1**] $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{5}$

[**2**] $f_2(x) = \dfrac{20}{x^2 - 2x + 3}$

[**3**] $f_3(x) = \dfrac{20}{x^2 + 2x - 3}$

Activity 1. technology で同じグラフを描いてみよう。◇ Y= で関数入力画面を表示する。3 つの関数を入力する。
◇ Window で, グラフを描く定義域と値域を設定する。
◇ graph で 3 つの関数のグラフが順に描かれる。
さらに詳しい値を知りたいときは，◇ table でグラフを描くために計算された表をみることができる。表の範囲の設定は ◇ tblset でスタートの数値と刻みの数値を指定することができる。

自分が手計算で描いたグラフと technology を使って描いたグラフを比較してみていかがですか?

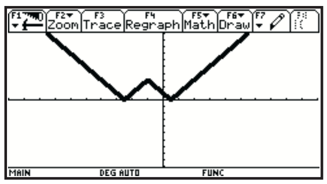
technology で描いたグラフとほぼ同じグラフが手計算で描けたましたか？$y = f_1(x)$ はうまく描けた人が多いでしょう。

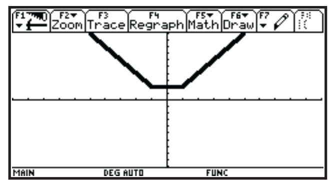
$y = f_2(x)$ のグラフは手計算と technology と同じようなグラフが描けた人も, 実は微妙に違うかもしれません。

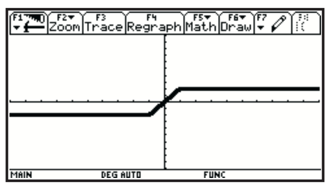
Activity **2.** 絶対値のついた関数を technology で描くには，組み込み関数を使用する。例えば $y = |x|$ は $y = abs(x)$ と入力すればよい。また $y = |x+3| - 4$ ならば $y = abs(x+3) - 4$ と入力する。後は描く範囲を Window で設定し，Graph を押すだけだ。
上の課題で君の描いたグラフが正しいか否かを technology で確認しなさい。

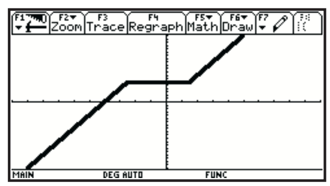
絶対値記号を使うといろいろ面白いグラフを描くことができる。

Activity **3.** abs(　　) を使って, 自由に絶対値のついた関数のグラフを描いて観察しなさい。観察が終われば以下のようなグラフを technology で描くにはどのような関数がよいかを調べなさい。









これ以外に面白いグラフが描けたらその関数を発表しよう。

課題 **2.** **[1]** $f_1(x) = [x] + 1$　$f_2(x) = [x] + 2$　$f_3(x) = [x] + 3$　$f_4(x) = [x] + 4$ のグラフを描きなさい。

[2] $f_5x) = [x+1]$　$f_6(x) = [x+2]$　$f_7(x) = [x+3]$　$f_8(x) = [x+4]$ のグラフを描きなさい。

[3] $f_9(x) = 2[x]$　$f_{10}(x) = 3[x]$　$f_{11}(x) = 4[x]$　$f_{12}(x) = 5[x]$ のグラフを描きなさい。

[4] $f_{13}(x) = [2x]$　$f_{14}(x) = [3x]$　$f_{15}(x) = [4x]$　$f_{16}(x) = [5x]$ のグラフを描きなさい。

この課題のグラフを描くときに，ベクトル移動や，対称移動, 拡大縮小のことを考えて描きましたか？もしこれらのことを考えた描いたのなら，あなたは関数のグラフを描く達人になりつつあります。

Activity **4.** technology でガウス記号のついた関数のグラフを描くには，やはり「組み込み関数」を使う。$y = [x]$ は $y = int(x)$ と入力する。例えば $y = [x+1]-3$ は $y = int(x+1)-3$ と入力することになる。
自分で自由にガウス記号のついた関数を作って, そのグラフを描かせて遊びなさい。面白いグラフができればその関数の式を発表しよう。

Activity **5.** technology を使って $f(x) = \dfrac{10}{x^2+1}$ のグラフを描いてみなさい。
このグラフを元にして次の関数のグラフを technology を用いずに描きなさい。

[**1**] $f_1(x) = \dfrac{10}{x^2+1} + 3$

[**2**] $f_2(x) = \dfrac{10}{x^2+1} - 2$

[**3**] $f_3(x) = -\dfrac{5}{x^2+1}$

[**4**] $f_4(x) = \dfrac{10}{(x-1)^2+1}$

[**5**] $f_5(x) = \dfrac{20}{(x+2)^2+1} + 3$

指導上の留意点 1. 元になるグラフが 1 つわかればどのような関数であっても，ベクトル移動，対称移動, 拡大縮小の考えは有効であることを感じ取らせるのが目的である。

Activity **6.** technology を使って次の関数のグラフを描き，その形をメモしておきなさい。

[**1**] $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$

[**2**] $f_2(x) = x^2 + 4$

[**3**] $f_3(x) = [x^2]$

[**4**] $f_4(x) = \left|x^2 - 9\right|$

[**5**] $f_5(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

[**6**] $f_6(x) = \cos x$

これらのグラフすべてに共通した性質がないだろうか？

指導上の留意点 2. $f_1(x)$ から $f_5(x)$ までは Window を $-10 < x < 10$,$-10 < y < 10$ 位で描けばよいが，$f_6(x)$ だけはこの範囲で描くと直線になってしまう。だからこれだけは Window を変えた方がよい。もちろん degree で OK。これだけのグラフを描くとすべて y 軸で対称になっていることはすぐにわかるでしょう。

Activity **7.** technology を使って次の関数のグラフを描き，その形をメモしておきなさい。

[1] $g_1(x) = \dfrac{1}{x}$　　**[2]** $g_2(x) = x^3 + 4x$

[3] $g_3(x) = [x]$　　**[4]** $g_4(x) = \left|x^3 - x\right|$

[5] $g_5(x) = x^9 - 2x^7$　　**[6]** $g_6(x) = \sin x$

これらのグラフのうち 1 つを除いて残り 5 つに共通した性質がないだろうか？

では，$g_3(x) = \dfrac{1}{x^2}$ と $g_4(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ のグラフはどうでしょう。似ていると思いますか?それとも異質でしょうか?

Activity **8.** 実際に technology でこのことを調べなさい。

予想は当たったでしょうか?この 2 つはベクトル移動のような単純な動きではないようだ。このようにまったく異質なグラフになった原因を話しておこう。

原因は定義域にある。「定義域」は特に断らない限り，y が実数として存在するような実数全体を考えるのが習慣である。

関数 g_3 では分母に x があるので，$x = 0$ を代入することはできない。よって g_3 の定義域は $x \fallingdotseq 0$ の実数である。

これに対して，関数 g_4 では $x = 0$ を代入しても y の値はきちんと存在する。ところが今度は別の値で困る。方程式 $x^2 - 1 = 0$ の解は ± 1 だから，$x = \pm 1$ を代入することができない。つまり g_4 の定義域は $x \fallingdotseq \pm 1$ の実数である。

グラフが異質になった大きな原因は定義域の違いによるのだ。

さらに分母が 0 になる付近を詳しく調べてみるともう一つ大きな違いに遭遇する。

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$g_3(x)$	100	10000	1000000	100000000
x	0.0001	0.001	0.01	0.1
$g_3(x)$	100000000	1000000	10000	100

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
$g_4(x)$	$-5.2631\cdots$	$-50.251\cdots$	$-500.2501\cdots$	$-5000.25\cdots$
x	1.0001	1.001	1.01	1.1
$g_4(x)$	$4999.750\cdots$	$499.7501\cdots$	$49.751\cdots$	$4.7619\cdots$

$g_3(x)$ は分母が 0 になる値 $x = 0$ の付近で急激に y の値が大きくなることがわかるだろう。しかもこの値は，$x = 0$ を中心として対称になっている。

これに対して $g_4(x)$ は分母が 0 になる値 $x = 1$ の付近で天地がひっくり返るような状況が起こっていることがわかるだろう。$x = 1$ より少し大きな値では，1.0001 から 1.1 までのわずか 0.0999 で約 5000 も急激に減少しているし,$x = 1$ より少し小さな値では，0.9999 から 0.9 までのわずか 0.0999 で約 5000 も急激に増加しているのである。

$g_4(x)$ の分母が 0 になるもう一つの値 $x = -1$ の付近の様子も調べてみるとよいだろう。

このように，分数関数では，分母が 0 となるような x の値の付近では，極端な「地殻変動」が生じることがあるのが特徴である。

このような地殻変動の有無を表すために数学では次のような記号を導入する。

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

1 式は，関数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ で x を右から 0 に近づけると y は ∞ に発散することを表し（∞ は数値ではなく，単なる記号である）,2 式は，関数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ で x を左から 0 に近づけると y は ∞ に発散ことを表す。

$x = 0$ に「右から近づいても」「左から近づいても」どちらも y が ∞ に近づくとき，これを次のように表現する。

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

この記号を用いると，

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

と表せ，このことは, 関数 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ では $x = 1$ に右から近づくのと，左から近づくのとでは，まったく異なることを表している。したがってこの場合には「天地がひっくり返る」ような「地殻変動」が生じている事になる。

課題 **3.** 次の関数は，分母が 0 になる値の付近で「地殻変動」が生じているだろうか。手作業で調べなさい。また，もし地殻変動が生じる場合は，それが何カ所で生じるかも調べなさい。

[**1**] $g_5(x) = \dfrac{10}{x^2+2x-3}$

[**2**] $g_6(x) = \dfrac{10}{x^2+2x}$

[**3**] $g_7(x) = \dfrac{10}{x^2+2x+1}$

[**4**] $g_8(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{2x-3}$

[**5**] $g_9(x) = \dfrac{1}{x^3-x^2}$

[**6**] $g_{10}(x) = \dfrac{10}{x^3-x^2+1}$

Activity **9.** 上の $g_5(x)$ から $g_{10}(x)$ までの関数のグラフを描いて，君が手計算で調べたことが正しいか否かを確認しなさい。

Activity **10.** 分数関数で，地殻変動の生じない関数を 2 つ作りなさい。

指導上の留意点 3. 分母が決して 0 にならない分数関数なら大丈夫である。しかし分母が 0 になるような値があるにも関わらず地殻変動が生じない関数を作るのはちょっと考えないとできないだろう。ここまでの課題や Activuty を通して何かを見つけるでしょう。