２次関数のグラフから定点を通る曲線群の導入

－従来の科目の枠を超えて－

奈良女子大学文学部附属中等教育学校
大西俊弘

１．はじめに

私は、５年ほど前から中・長期的な研究テーマとして、「テクノロジー利用を前提とした数学カリキュラムの開発」に取り組んでいる。特にこの２年間は、日本の実状を踏まえた上で、テクノロジーの利用に適した教材を開発し、授業実践を通してその効果を検証することに取り組んでいる。本稿では、その一環として2001年度に４年生に対して行った２次関数の授業実践について報告し、その結果を踏まえて、「定点を通る直線（曲線）群」の導入方法について、新たな提案を行う。

２．授業実践にいたる経緯

2-1　問題意識

数学Ｉのほとんどの教科書では、「２次関数」の章末問題あたりで、次に示す【問題１】のようなタイプの問題が載録されている。このタイプの問題は、単元全体の総合的な理解度を測るのに相応しいと位置づけられているのであろう。しかし、今までの授業経験から、生徒がこの問題を理解するには、いくつかの障壁が存在すると感じてきた。その詳細について、次節以降で述べる。

【問題１】
２次関数　$y=x^2-2ax+2a+3$　・・・・・①　がある。
（１）①の関数のグラフがｘ軸と接するように定数ａの値を定めよ。
（２）①の関数の最小値をｍとするとき、ｍの最大値を求めよ。また、そのときのａの値を定めよ。

2-2　設問（１）について

実際に生徒に上記の問題を解かせてみると、設問（１）の正答率は比較的高い。正答率が高い理由は、生徒の間に「グラフがｘ軸に接する⟺判別式Ｄ＝０」という関係が定着しているからであろう。しかし、今まで授業で生徒と接してきた経験では、（ほとんどの）生徒はこの問題の意味を本当には理解できていない。すなわち、「ａの値の変化によって関数①のグラフの位置が変化する」というイメージが、（大半の）生徒の頭の中には存在していない。

2-3　設問（２）について

設問（２）は、生徒が非常に苦手とする問題である。理解を困難にしている要因の１つは、「最小値ｍの最大値」という言葉の意味が理解できないことにある。「最小値の最大値とは何のこと？」、「最小値の最大値なんて論理矛盾ではないのか？」といった生徒の声をよく耳にする。こうした疑問は、「ａの値にともなって関数①のグラフが動く」というイメージを、（大半の）生徒が持っていないことに起因している。

理解を困難にしているもう１つの要因は、「解答をしていく途中で、ｙがｘの関数であると考えている段階ではａやｍを定数と見なし、次の段階ではｍをａの関数と見なしている」という認識上の２段構造にある。関数に対するしっかりした理解がないと、上記のような取り扱いはできないし、混乱

することになる。また、平常の授業では変数がｘである関数ばかり学んでいるので、「ａを変数とする関数を考える」という発想がなかなか出てこないようである。「ａの値の変化にともなって関数①のグラフが動く」というイメージが生徒の頭の中にあれば、関数①の最小値mがａの関数であると見なす必然性も理解できるであろう。

３．授業実践

2001年度の４年生３クラスのＩ期の中間考査の試験範囲は、「２次関数（の全ての単元）」であった。中間考査終了後（７月上旬）は、２次関数に関する基本的な知識を前提として、より発展的な問題に取り組む演習を行った。

【課題１】
２次関数　$y=x^2-2ax+2a+3$　・・・・・①　（ただし、ａは定数とする）
（１）①のグラフがｘ軸と接するように定数ａの値を定めよ。
（２）①のグラフをGRAPESを用いて描き、ａの値を変化させて、（１）の結果を確かめよ。

【課題２】
２次関数　$y=x^2-2ax+2a+3$　・・・・・①　（ただし、ａは定数とする）
（１）①の関数の最小値をmとするとき、mの最大値を求めよ。またそのときのａの値を定めよ。
（２）①のグラフをGRAPESを用いて描き、ａの値を変化させて、（１）の結果を確かめよ。

＜この課題でのねらい＞

1-２で述べたように、生徒にとって分かりにくい「最小値の最大値」の意味を理解させることが目標である。

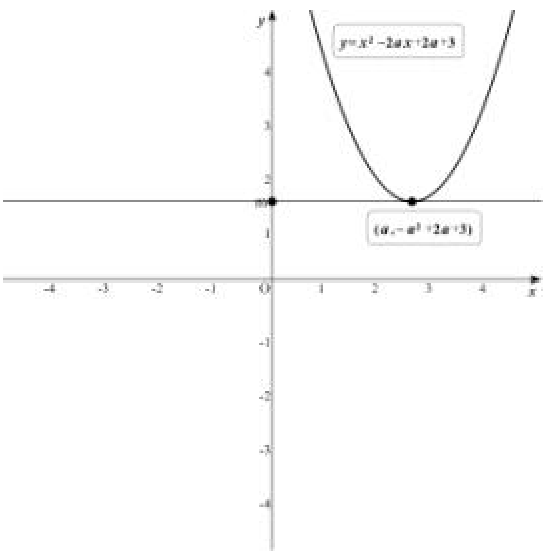

図１　mをｙ軸上に表示する

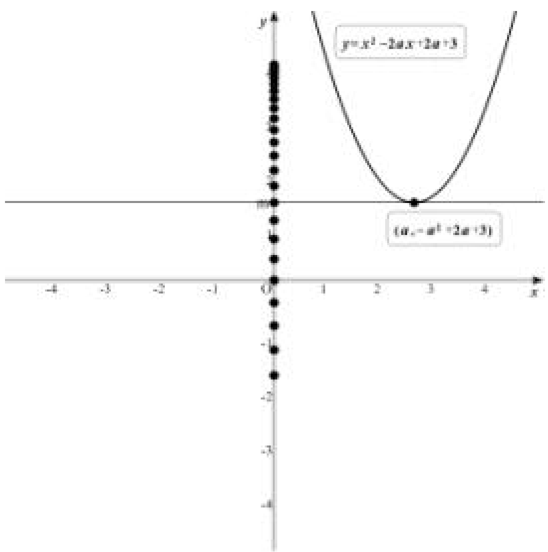

図２　mの残像を残す

＜生徒の反応＞

設問（１）では、問題の意味がわからない生徒が続出した。代数的な計算で答えが求められたのは、各クラスとも数名であった。

設問（２）では、生徒はグラフを動かしていくことによって、問題の意味が理解できたようである。ｙ軸上のｍの軌跡から、最小値ｍの最大値が４であることは、ほとんど全員が納得していた。

【課題３】

２次関数　$y=x^2-2ax+2a+3$　・・・・・①　（ただし、ａは定数とする）

（１）①のグラフをGRAPESを用いて描き、ａの値を変化させて気づくことを書き出せ。

（２）（１）で気づいた関数①のグラフの性質について、それが成り立つ理由を考察せよ。

＜この課題でのねらい＞

ア　関数①のグラフの頂点の軌跡が放物線となる

イ　関数①のグラフは、ａの値がいくらであっても定点(1,4)を必ず通る

これらは、本来ならば数学Ⅱで学ぶ「軌跡」、「定点を通る曲線群」に関する内容である。通常の展開とは異り、これらの題材を２次関数の学習の延長として、自然な形で導入することを目指した。

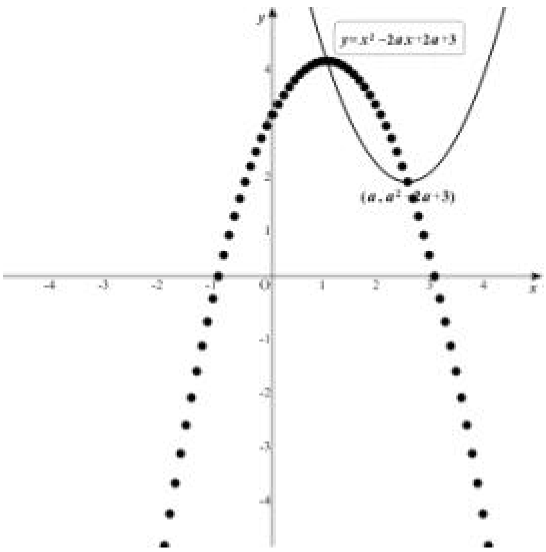

図３　頂点の残像

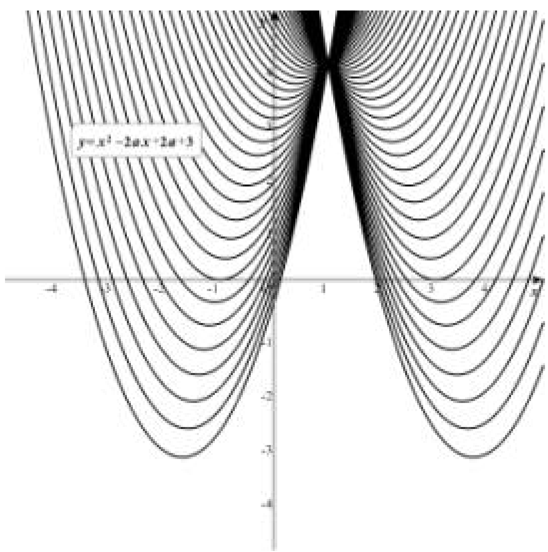

図４　曲線の残像

＜生徒の反応＞

設問（１）では、最初は残像機能をOFFにして考えさせたが、前記ア・イのどちらの性質も生徒はすぐに発見した。次に、残像機能をONにしてグラフの残像を描画すると、生徒にとっては初めて見る美しい軌跡だったようで、あちこちで「オゥー！」といった感嘆の声が挙がった。

４．数学カリキュラムへの提案

4-1　「定点を通る曲線群」の問題

【課題３】で取り上げげた「定点を通る曲線（直線）群」は、数学Ⅱの「図形と方程式」の単元で扱う内容であり、ほとんどの教科書では、次のような例題が採用されている。

> 直線$(2k+1)x+(k-3)y-4k+5=0$が定点を通ることを示せ

その解答は

> kに関して整理すると　$(2x+y-4)k+(x-3y+5)=0$
> 任意のkに対して成り立つことより　$2x+y-4=0$　$x-3y+5=0$
> この連立方程式を解いて　$(x,\ y)=(1,\ 2)$

この例題は、生徒にとって問題の意味が大変理解しにくいものである。また、それ以上に、解答の「ｋに関して整理する」という部分の意味・必然性が理解しにくい。教師にとっても、この問題の解説は、最も難しいものの１つであり、以前からよい指導法はないかを模索してきた。今回の授業実践の経験から、次のような導入方法をとれば、理解が深まるのではないかと考えた。

4-2　具体的な提案

定点を通る曲線（直線）群に関しては、「２次関数」の単元に「関数（曲線）群」という小単元を設けて、その単元で導入することを提案したい。その小単元では、今回の授業実践で扱った課題などとともに、次のような例題を設定する。この小単元では、２次関数だけでなく、１次関数なども扱い、テクノロジーを利用して、関数のグラフの動的な見方について指導する。

> 【例題１】　１次関数$y=ax+1$　………①　のグラフ

まず、導入として、文字定数ａがｘの係数となる関数①について考える。通常の授業では、「１次関数①のグラフは、傾きａ、切片１の直線である」として教えられることが多い。その際のイメージは、「静的で、動かない１本の直線」である。しかし、GRAPESを用いてａの値を変化させながらグラフを描くと、①の式に対する見方が広がる。すなわち、①の式を「定点(0,1)を通る直線群である」と見ることができることに気付く。切片が１であることから、このこと自体は生徒にも受け入れ易いであろう。

> 【例題２】　１次関数$y=ax+a+1$　………②　のグラフ

次に、文字定数ａの個数をもう１つ増やした関数②について考える。傾きと切片の両方が変化するので、生徒は定点を通るかどうかすぐには判定できないであろう。しかし、グラフを描くと、やはり②も定点(-1,1)を通る直線群となることが分かる。そこで、(-1,1)を通る理由について考察させる。考察が進みにくいようであれば、関数を$y=ax+2a+1$などに変更して試行錯誤を繰り返し、「ａに関して整理する」ことの必然性が理解できるであろう。

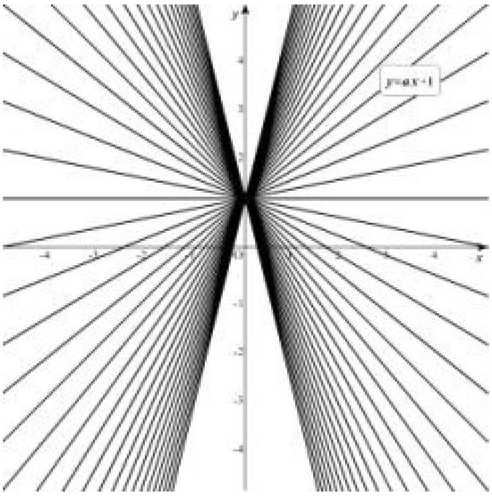

図5　$y = ax + 1$

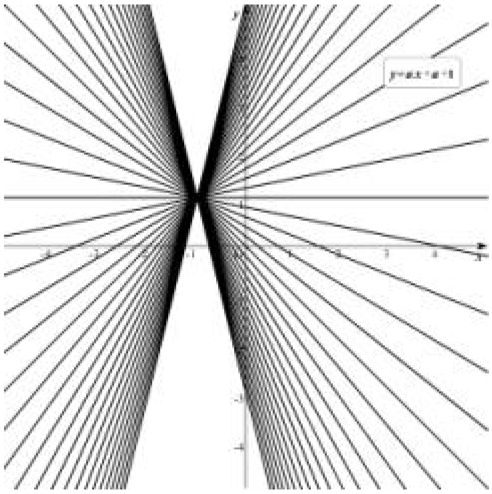

図6　$y = ax + a + 1$

【例題３】　２次関数$y = x^2 + ax + 1$　………③ のグラフ

例題１を２次関数の場合に拡張する。直線群だけでなく、放物線群でも定点を通ることを示す。定点の座標を求める際の考え方は、１次関数でも２次関数でも同じであることを強調する。

【例題４】　２次関数$y = x^2 + ax + a + 1$　………④ のグラフ

例題３の拡張であるが、考え方自体は例題１から例題２への拡張と同じなので、理解しやすいであろう。例題ではなく、練習問題として扱ってもよい。

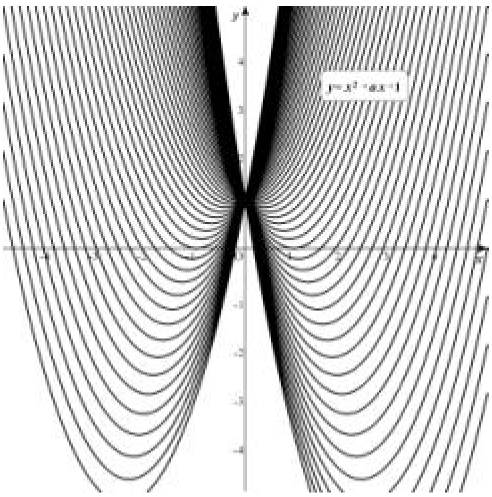

図7　$y = x^2 + ax + 1$

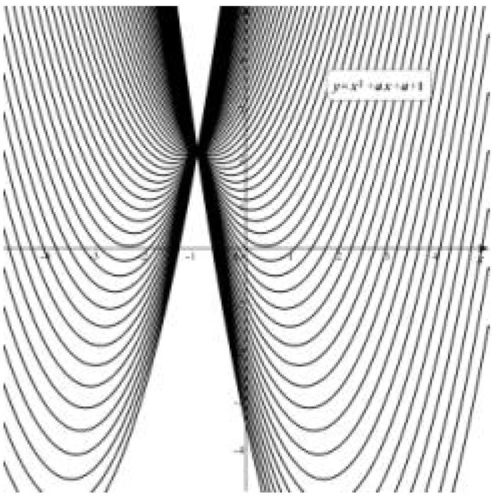

図8　$y = x^2 + ax + a + 1$

【例題５】　関数$y = ax^2 + 1$　………⑤　のグラフ

例題１を別の形で２次関数へ拡張する。例題１からの類推で、生徒には理解しやすいものである。この問題自体は、次の例題６・例題７への伏線である。

【例題６】　関数$y=ax^2+a+1$　　　………⑥ のグラフ

例題５の拡張であるが、定点が存在しない場合である。曲線群が通る定点がいつでも存在するとは限らないことを示し、その理由を考察させる。

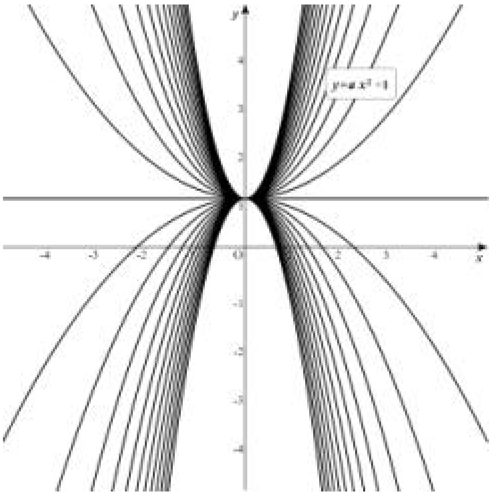

図９　$y=ax^2+1$

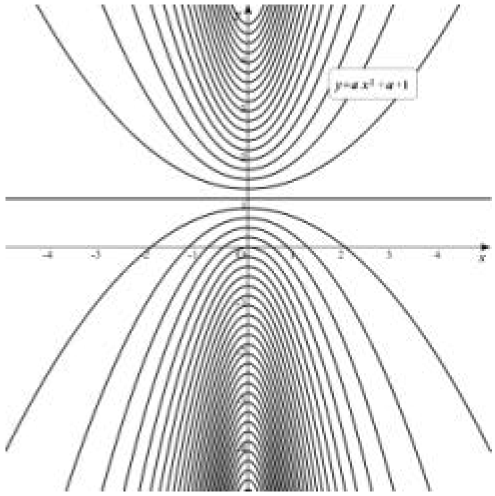

図10　$y=ax^2+a+1$

【例題７】　関数$y=ax^2-a+1$　　　………⑦ のグラフ

これも例題５の拡張であるが、今度は定点が２個存在する場合である。２次以上の関数の場合には、曲線群が通る定点は複数存在する。しかし、定点の座標を求める際の考え方は同じである。

【発展】　関数$y=ax+a^2+1$　　　………⑧　のグラフ

発展的な例として、例題２の式を一部変更して、ａの次数を２とした関数⑧を考える。⑧で表される直線群は定点を通らないが、包絡線として放物線$y=-x^2/4+1$が現れてくる。直線を寄せ集めて放物線が得られるというのは、生徒にとってはきっと驚きであろう。

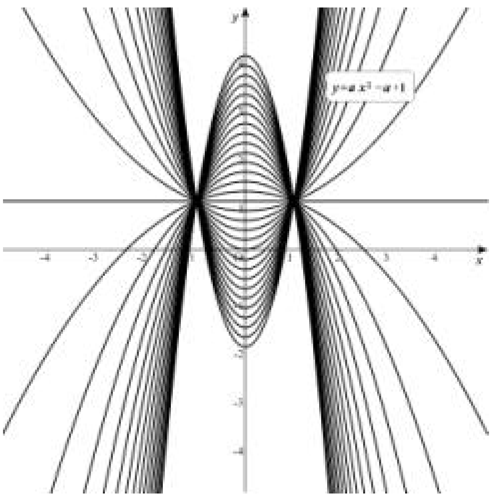

図11　$y=ax^2-ax+1$

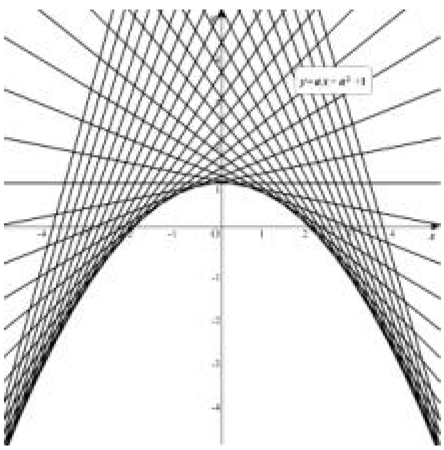

図12　$y=ax+a^2+1$