

極座標のグラフの探究

佐伯昭彦（金沢工業高等専門学校）

1. はじめに

平成 11 年に公表された高等学校学習指導要領（数学）の目標に「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」という文言が新しく入った。数学的活動とは、観察、操作、実験・実習などの外的な活動と、直感、類推、帰納、演繹などの内的な活動のことであり、創造性の基礎を培うために授業で数学活動を積極的に行うことは大切なことである。

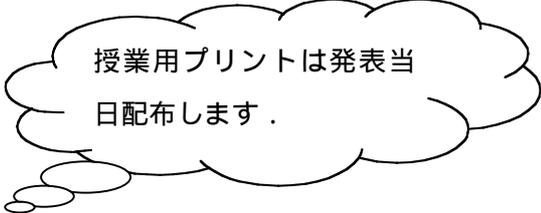
本稿では、筆者が金沢高専で実施した授業「極座標による図形」の一部を紹介する。高等学校では、極座標は数学 C の「式と曲線」で取り扱われており、学習指導要領の内容の取り扱いには「イ（媒介変数表示と極座標）については、コンピュータ等の活用などによりいろいろな曲線をかき、観察する程度とする。」と記述されている。これでは外的な数学的活動は行われるが、内的な数学的活動は行われないことになる。外的な数学的活動を行うと、生徒たちは沢山のことを発見する。生徒が「面白い!」「不思議だ?」「なぜだろう?」と感じたことに対して、内的な数学的活動を通して、生徒が「なるほど!」と納得することによって創造性の基礎が培われるのではないだろうか。本セッションでは、金沢高専の生徒が発見した正葉曲線 ($r = 10\sin nq$) の規則と、生徒自身が既習の知識で解決した方法について紹介する。

さらに、積分を使ってあおい貝の断面積と長さを求めた教材について紹介する。これは高等学校の範囲外の教材であるが、得られた知識を使って生徒が身近な事象の問題を解決し「これは便利だ!」と生徒が実感したときに、活用した知識の有用性について学ぶことができる例として紹介する。

2. 授業の概要

金沢高専の 3 年生 (57 人) を対象に「極座標による図形」を 10 時間 (45 分授業) 行った。授業はプリント [No.27-No.33] をもとに行われ、授業内容は、以下の通りであった。

- (1) 極座標の導入とグラフ [No.27-No.28]
- (2) 極座標による図形の面積 [No.29-No.30]
- (3) 極座標による曲線の長さ [No.31-No.32]
- (4) 応用問題 (オウム貝) [No.33]



授業用プリントは発表当日配布します。

使用した教科書は、大日本図書の「微分積分 I」で、上記内容の(2)~(4)は、高等学校の範囲外である。

3. 教材の概要

3.1 正葉曲線の探求

(1)極座標の導入 [No.27]

極座標の定義と用語について解説し，座標をグラフ上にプロットする方法と直交座標と極座標との関係について計算について練習する．

(2)極座標のグラフ [No.28]

アルキメデスの螺線，正葉曲線，カージオイドについて，電卓を使って数表を求め，求めた数表をもとにグラフを描いた．次にグラフ電卓を使って描いたグラフを確認した．最後に以下に示す正葉曲線の探究を行った．

探究．^{せいよつ}正葉曲線 $r = 10\sin n\theta$ の n にいろんな値を入れてグラフを描いてみよう．どんな規則があるだろうか．発見したことと理由をまとめなさい．

【操作方法】

[極座標の設定]

MODE

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential SIMU
Real a+bi re^θt
Full Horiz G-T
```

極方程式

[ウィンドウの設定]

WINDOW

```
WINDOW
θmin=0
θmax=6.2831853...
θstep=.1
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
```

2

[式の入力]

Y=

```
P1ot1 P1ot2 P1ot3
√r1=10sin(3θ)
√r2=
√r3=
√r4=
√r5=
√r6=
```

発表当日は，先生方に規則を見つけて頂き，それぞれの規則の理由について検討・議論したいと思います．生徒の内的な数学的活動を支援するための参考になると幸いです．

[手順2] データを入力しプロットする.

データ入力方法

STAT で 1:Edit.....を選択する.

- L₁ に x 座標,
- L₂ に y 座標 を代入する.



L1	L2	L3	1
.3	.3		-----
.8	1.2		
.3	1.5		
0	1.7		
-.7	1.8		
-1.7	1.6		
-2.4	.9		

L1(1) = .9

Window の設定

データを見て設定しよう.

データの表示

2nd **Y=** で 1:Plot1...On を選択する.



【グラフを下に書こう！】



[手順3] データにピッタリとあう曲線の式 (モデル式) を求めよ.

ヒント: 教科書で勉強した式で, アルキメデスの螺線は $r = kq$ (k は定数) である. アルキメデスの螺線に似ている曲線として, $r = e^{kq}$ (k は定数) である. どちらかの式で求めなさい.

求めたモデル式: _____

[手順4] 手順3で求めた式をもとにオウム貝の断面積と外周の長さを積分で求めよ.