

数学教育におけるテクノロジーの活用による観察・実験的方法の復権

—新学習指導要領に関連して—

清水 克彦
(東京理科大学理学部)

[要旨]本稿では、19世紀初頭の数学教育改良運動で主張されていた「観察・実験的方法」が、コンピュータやグラフ電卓などのテクノロジーが数学教育において普及するにつれて、再び注目されるようになってきていることを当時の主張と比較しながら指摘する。また、この観察・実験的方法が本年度から施行される高等学校数学科・理数数学ならびに中学校数学科の学習指導要領において強調されていることを示す。さらに、数学教育改良運動時と現代における観察・実験的方法の意味するところを比較しながら、数学科における学習指導方法としての観察・実験的方法の特徴とその限界を、実例をもとに示す。

「これまでの数学事項の排列の仕方は、哲学者には論理的であるかもしれないけれど、普通の子供にとっては全く非論理的なのだ。…子供が徹底的に実験により、実測により、その他のできるだけの方法で、その論理を適用しようとする物事に、慣れ親しませることが、何よりも大切なことである。」

(E.H.Moore: 小倉金之助, (1983)「数学教育の歴史」, 小倉金之助著作集6, 勁草書房, p.334)

1. ムーアの実験室的方法(Laboratory Method)

上記の文章は、19世紀初頭にペリーらとともに数学教育改良運動を行ったアメリカの数学者であり数学教育者であったムーアのものである。このような実験・実測を取り入れた学習指導法を彼は、「実験室的方法(Laboratory Method)」と呼んだ。数学教育改良運動は、その時代以前のエリート向けのユークリッド幾何の形式的訓練や大衆向けの算術教育を脱皮し、現在の中高等教育の数学教育の教育課程の原型をもたらした運動である。そのペリー

やムーアが敵とした数学教育とは、東京理科大学理窓会の初代会長でもある小倉金之助(1983)によれば「スコラ哲学的数学教育」と呼べるものであり、「教師は書物に書かれている既成数学を読み、生徒はそれを記憶して、やっと数理を認識するような、死んだ学習方法」であったという。しかし、ペリーに従えば、「教師から教わったことはさほどたいしたものではなく、自分自身で発見したことは、自分にとって本当に価値のあるもので、精神上永久的なものとなる。」(小倉(1983),p.335)のである。

ペリーは、「実用数学(Practical Mathematics)」と呼ぶ、普通の人にとっての数学の「新しい研究方法」を提唱した。ここで言う「実用数学」とは、小倉(1983)によれば「数学の実用とか応用数学とか、そんな単純なものではない」ものであり、ペリーの言を引けば、「"実用数学"と呼ばれる学問の研究法において、もっとも本質的な観念は、生徒が物事の理由をたずねられる前に、それらの物事に親しくならなくてはならない、ということである。」ことを目指しているものである。小倉(1983)の言で引き継いで説明すれば、「生活や自然及び社会の中から、子どもら

実践－観察・実験・実測・計算・推理－によって、数学を学びとらせよう。」とすることを行うものであった。このような「数学の研究法」・「数学の学習指導法」に正しく「実験室的方法」と言う名を与え、実践したのがムーアであった。

しかし、残念ながら一つの数学の研究法であり望ましい学習指導法であるべき実験室的方法は、その後継続して行われることなく、数学教育の歴史の中に埋もれてしまったかのようになった。

2. 新学習指導要領における観察・実験的方法の重要性の指摘

平成 10 年告示の新しい学習指導要領の中学校数学科ならびに高等学校では、この観察・実験による学習指導、言い換えれば実験室的方法が数多くのところで強調されるようになっていく。

2.1 中学校数学科における「観察・操作や実験」の強調

例えば、中学校数学科においては
「〔第1学年〕 1 目標

(2) 平面図形や空間図形についての観察、操作や実験を通して、図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、論理的に考察する基礎を培う。」

に代表されるように図形分野では、1年生から3年生まで「観察、操作や実験を通して」という言葉が6回も登場している。また、

「〔第2学年〕 1 目標

(3)・・・また、具体的な事象についての観察や実験を通して、確率の考え方の基礎を培う。」

というように、確率分野でも観察・実験の重要性が指摘されている。さらに、

「第3 指導計画の作成と内容の取り扱い

4. 各領域の指導に当たっては、必要に応じ、そろばん、電卓、コンピュータや情報通信ネットワークなどを活用し、学習の効果を高めるように配慮するものとする。特に、数値計算にか

かわる内容の指導や観察、操作、実験などによる指導を行う際にはこのことに配慮するものとする。」

とすべての領域における観察・実験の重要性がコンピュータの活用とともに指摘されているのである。

2.2 高等学校数学科・理数数学における「数学的実験」の位置付け

また、高等学校数学科においても、指導要領の解説によれば目標の「数学的な活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。」という文言のなかの「数学的な活動」という言葉の中に、観察・実験が含まれていることがわかる。指導要領の解説では、次のように述べている。

「数学的活動については、観察、操作、実験・実習などの外的な活動と、直観、類推、帰納、演繹などの内的な活動が考えられる。」(文部省(1999),「高等学校指導要領解説:数学編・理数編,p,9」)

また、理数科の「理数数学探究」では課題研究の中に図1のような数学的実験を設け、次のような性格付けを与えている。

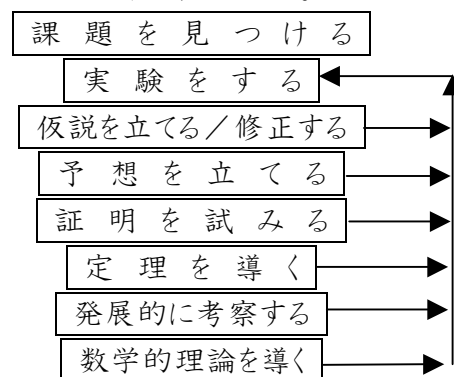


図1 高等学校理数科における
数学的実験のプロセス

「③ 数学的実験

普通教育の数学科で重視している「数学的活動」のうち、理数科においては、特に数学的考察・処理の質を一層高めることを重視し、「数学的実験」という学習方法を示した。」(文部省(1999),p.145)

この数学的実験では、つぎのようなプロセスを経ることが示されている。

高等学校において、観察・実験が重視されるようになる一つの礎石として、その指導要領の告示の7年前に出された「高等学校 数学指導資料 指導計画の作成と学習指導の工夫」(文部省, 1992)を挙げることができる。この指導資料は、数学者からは寺田文行、一松信、森本光生、山崎主次郎の4氏が作成に参画している。「第2節 コンピュータを活用した指導」のなかで、観察・実験に係わって次のような指摘をしている。

「(2)数学の実験的性格

操作・実験による納得できるように

・・・指導に当たっては、定理の証明よりも、まず、操作・実験により具体例を通して事実そのものを納得させることが大切である。具体的な数値などに関する実験・実習を通して、初めて定理の意味が理解できる場合も多い。このような目的には、コンピュータは有用な機器である。

数学の理論の発見や発展は

どのようになされたか

数学は論証の学問であると言われる。そのこと自体は正しいのであるが、数学の発見や発展は必ずしも論理のみによるものではない。歴史を調べてみると、まず具体的な実例による「実験」を通した深い洞察により、結果の予測が行われ、その後、厳密な証明が与えられるという形で、数学の理論が作られた場合が多い。」

数学に持つ実験的な性格が、数学教育の場においてこのように位置付けられるからこそ、今回の指導要領の中学校数学科ならびに高等学校数学科・理数科において、観察・実験が積極的に取り上げられることになったのである。そして、中学校ならびに高等学校に共通して、観察・実験がコンピュータ・ソフトやグラフ電卓などのテクノロジーと結びついている点である。実験的方法が100年のときを経て、

テクノロジーによって復活したかのようにも見えるのである。

3. 現代における観察・実験的方法の復権ーテクノロジーの活用に焦点を当ててー

3.1 数学研究における実験的方法の復活

実は、このような実験的方法のテクノロジーによる復権は数学教育のみならず、それに先立って数学研究において起こっている。アッペルとハーケンの四色問題のコンピュータによる解決に代表されるように、コンピュータは数学研究の一つの道具として認知され、数学者の実験装置として役割が認められるようになってきている。

D. Epstein, S. Levy, R. de la Llaveらが創刊した「実験数学(Journal of Experimental Mathematics) (<http://www.expmath.org/index.html>)」誌は数学の実験的な性格を反映し、コンピュータによる実験研究の結果を証明されていない推測であっても、それが面白ければ掲載するという方針を取っている。

また、最近では「実験数学」と題する数学書も数多く出されるようになってきている。その代表的なものとして、山本芳彦(2001),「実験数学入門」,岩波書店や C.T.J ドットソン(2000),「MAPLE V で学ぶ実験数学」,シュブリンガーなどを挙げることができる。この2冊では、数式処理ソフトウェアを用いて実験的方法によって数学を学ぶことが行われている。

3.2 ムーアの「実験的方法」と現代における実験的方法の対比

現在、数学教育の中で再び取り上げられるようになってきた実験的方法は、その精神においてムーアの「実験的方法」と共通している。すなわち、数学の研究法ならびに学習指導法として、演繹と帰納の両方のバランスを取ること、(学習者による)数学的対象の把握・理解を重んじること、数学的知識が生み出されるプロセスを体験すること、などを重要視しているという点が共通している。

しかし、ムーアの時代の「実験的方法」は、あくまでも実験・実測を現物実験や具体的な事物を用いて行うということが意図されていた。それに対して、現在の実験的方法においては、先の高等学校理数数学に見られるように学習者が実験のプロセスを体験することを通じて数学対象を把握・理解すること、実験を通じてパターンを見出すなど自ら数学的知識を形成すること、現物実験だけではなく思考実験も含めて考えられていること、そして、最も特徴的なことであるが数学用・数学教育用ソフトウェアやグラフ電卓などのテクノロジーの活用が積極的に図られていること、が行われている。

さらに、現在の実験的方法においてはテクノロジーを用いて、式表現(Symbolic Expression)、数値表現(Numeric Expression)、グラフ的表現(Graphic Expression)を同時に扱って、数学的対象の理解を豊かにすることが行われるようになってきていることや、非常に多量のデータやグラフの組織的な収集・観察が行われるようになってきていることも、その特徴として挙げることができる。

このようにムーアの時代の「実験的方法」と現代の実験的方法を対比すると、現在の実験的方法にはムーアの時代に比べると、基本的な部分は共通しているものの、そこで取られる方法や実現の仕方が非常に豊かになっているということが指摘できる。

以下では、具体的な事例を挙げながら、数学教育における現在の実験的方法について説明を行うことにする。一般的表計算ソフトウェアであるMS Excel、幾何学ソフトウェアとしてCabri Geometry、そして関数・微積分のためのソフトウェアとしてCalculus Unlimitedを、取り上げることにする。(以上のソフトウェア名称はすべて商標登録である。)

3.3 実験的方法の具体例

1) 多くの事例からの帰納、そして演繹的証明へ:MS Excelによる実験的方法

F.W.Stevenson の「数学における探究問題 (Exploratory Problems in Mathematics)」(1992) NCTMに次のような問題が出されている。

「任意の二つの数を選びなさい(同じ数でもよい)。その2数を加えた数と、その2数をかけた数を求めなさい。そして、さらにその二つの答えをたしなさい。この手順では作ることのできない数で、50未満で最大の数を見出さなさい。」

この問題に、もし、試行錯誤的に紙と鉛筆でアプローチしようとする、二つの数を1と2とすると、次のような結果を得る。

$$1+2=3 \quad 1 \times 2=2 \quad 3+2=5$$

次に、二つの数を3と5とすると、

$$3+5=8 \quad 3 \times 5=15 \quad 8+15=23$$

となる。このように進めていくと非常に大変であるし、また、何らかの予想を立てることも難しい。そこで、MS Excel を用いて様々な2数について順序良く観察を進めてみた。

数1	数2	和	積	和+積
1	1	2	1	3
1	2	3	2	5
1	3	4	3	7
1	4	5	4	9
1	5	6	5	11
1	6	7	6	13
1	7	8	7	15
1	8	9	8	17
1	9	10	9	19
2	1	3	2	5
2	2	4	4	8
2	3	5	6	11
2	4	6	8	14
2	5	7	10	17
2	6	8	12	20
2	7	9	14	23
2	8	10	16	26
2	9	11	18	29

表1 2数の和、積、和+積の観察

このような結果をさらに見やすくするために、次のようにまとめて見る。

1	11	×	21	×	31	×	41	×
2	12	×	22	×	32	×	42	×
3	×	13	×	23	×	33	×	43
4	×	14	×	24	×	34	×	44
5	×	15	×	25	×	35	×	45
6	×	16	×	26	×	36	×	46
7	×	17	×	27	×	37	×	47
8	×	18	×	28	×	38	×	48
9	×	19	×	29	×	39	×	49
10	×	20	×	30	×	40	×	50

表2 2数の和+積で表現される数

このように整理していくと、2数の和と積の和

で表されない数について、ある仮説が生まれてくる。Polya が言う暗示的接触(Suggestive contact)の段階である。そして、50を超えてしまうが、もし50についても表せないことが確認できれば、これは支持的接触(Supporting contact)として、この仮説がより強固なものとなっていく。(ポリヤ(1974),「数学における発見はいかになされるか1:帰納と類比」,丸善)

2)数学的現象を観察し、問題を把握し、解答や条件について理解する:Cabri Geometry による実験的方法

京都大学の入試問題につぎのものがある。
(宮原繁(1996),「平面図形」,科学新興社)

$\angle A = 90^\circ$ である直角3角形 ABC がある。頂点 B, C をそれぞれ始点として、辺 BC に垂直な半直線 l, m を頂点 A のある側にひく。次に辺 BC 上の任意の点 P より辺 AB, AC に垂線をひき、この延長が l, m と交わる点をそれぞれ Q, R とする。

- (1) 3点 Q, A, R は1直線上にあることを示せ。
- (2) 台形 $BCRQ$ の面積が3角形 ABC の面積の2倍となるときの、この台形の形を求めよ。ただし、 $AB \neq AC$ とする。

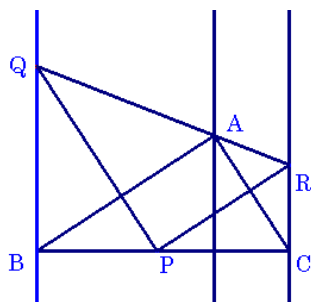


図2 問題図

この図の動点 P を移動してみると、

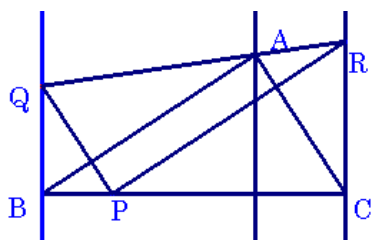


図3 動点 P を移動した図

たしかに QAR が1直線になっていることが確認できる。点 P がどこに移動しても QAR が1直

線になっていることを示すのが題意であることが確認できる。

さらに、 $\triangle ABC$ と $\square BCRQ$ の面積を Cabri Geometry で表示させてみよう。

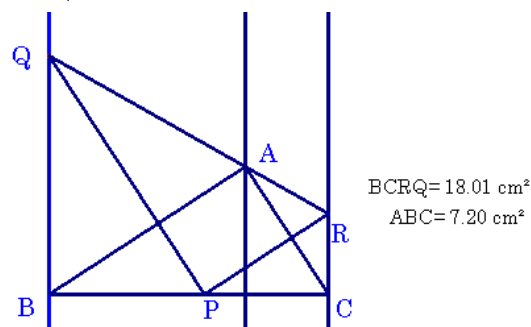


図4 Cabriによる面積の測定1

ここで動点 P を動かして、面積の変化をみると $\square BCRQ$ が $\triangle ABC$ のだいたい2倍になるときは、次のような場合であることが観察できる。

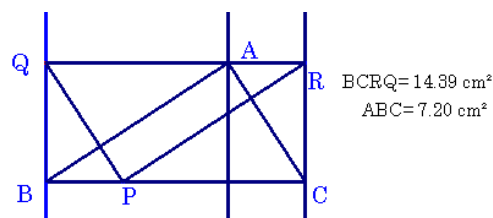


図5 Cabriによる面積の測定2

この観察結果から、面積が2倍になるときは、 $\square BCRQ$ の形が長方形になるときであることが予想される。さらに、 $AB=AC$ すなわち2等辺3角形の場合について、面積の変化を調べてみると次のようなことが観察できる。

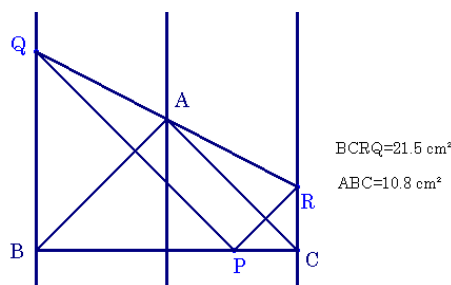
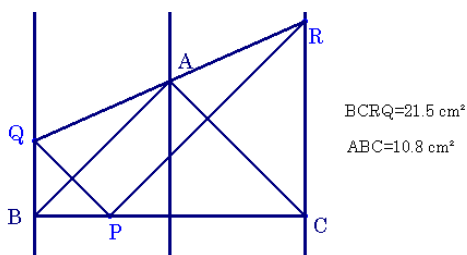


図6 $\triangle ABC$ が2等辺三角形の場合

「2等辺3角形の場合には、 $\square BCRQ$ の面積

は一定で、△ABC の2倍になっている。」つまり、題意のような状況にならないことが観察から分かるのである。

3) 公式のビジュアルな確認から、「自分の公式づくり」へ: Calculus Unlimited による実験的方法

次の公式は、3角関数の公式として多くの学生の記憶に残っている。

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

しかし、次の関数のグラフを考えてみた経験がある学生は少ないのではないだろうか。

$$f(x) = \sin^2 x, g(x) = \cos^2 x$$

これらのグラフを Calculus Unlimited で描いてみると次のようになる。

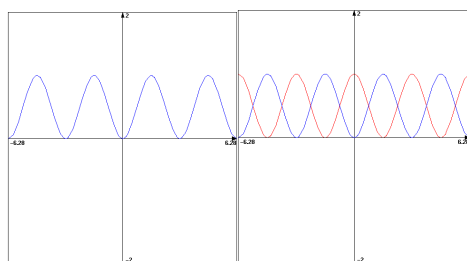


図7 $\sin^2 x$ と $\cos^2 x$ のグラフ

(左側は $\sin^2 x$ のみ、右側は $\cos^2 x$ を重ねたもの)

このように二つのグラフは $y=0.5$ を対称の軸とする線対称の位置にあることが分かる。それゆえ、この二つを加えた関数

$$\sin^2 x + \cos^2 x$$

は定数になるのである。

このことを表したのが、下図になる。

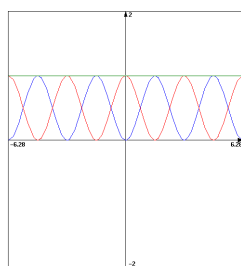


図8 $\sin^2 x + \cos^2 x$ のグラフ重ね描き

このことを数値的に確かめるために、このソフトウェアでは図8のような表機能が用意されている。この考え方にもとづけば、様々な3角関数の公式をビジュアルに確認できるのみならず、周期、振幅、位相を用いて「自分の公式づく

り」にチャレンジすることができる。

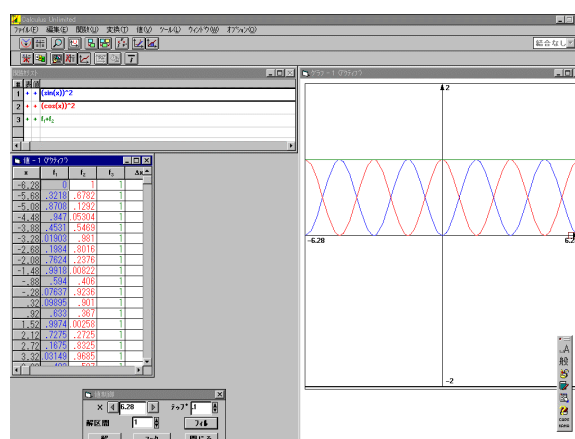


図8 Calculus Unlimited の表機能

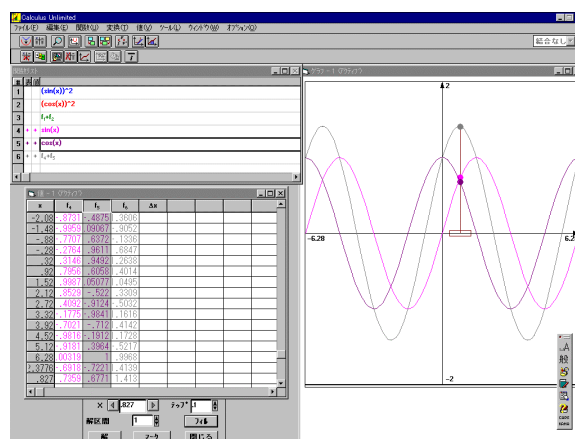


図9 自分の公式づくりのための活動

上記は、 $2(\sin x + \cos x) + 3 > 0$ という公式に結びついた事例である。

4. 観察・実験的方法の限界—数学科における知識形成の性質—

実験的方法は確かに生徒に意味を理解したり、自分で知識を発見したりと、様々な活動の機会を提供する。しかし、それでは生徒が獲得するのは経験的・帰納的知識であって、数学が重要視する論理的・演繹的知識ではない。この意味において、実験的方法には数学科の学習指導法として一つの限界がある。それゆえ、このような活動を経て、証明や記号による説明を行い全称性を確保することが必要となる。しかし、実験的方法を抜きに行くとすると、ペリーやムーアが敵とした数学教育が再び出現してしまうことになる。