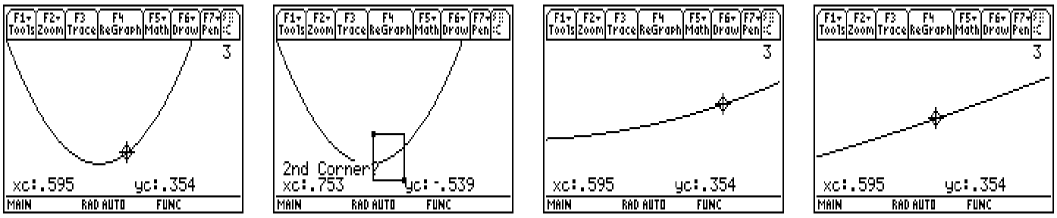
論理のない微分入門

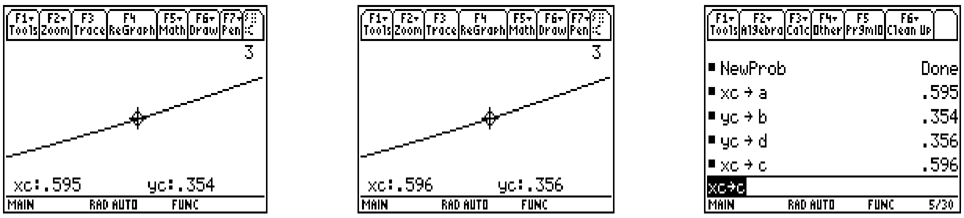
東海大学　　渡辺　信
watanabe@scc.u-tokai.ac.jp

１.微分は一次近似

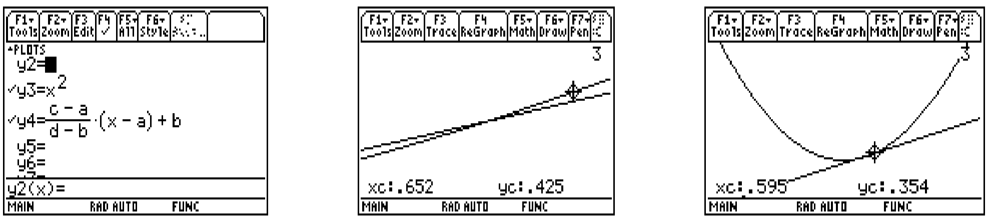
曲線の一部を拡大することは,道具が無くてはできなかった．具体的に微分という数学を見ることができることによって，微分は易しくなったといえよう．なぜ，積分が早くから存在して，微分は１６世紀を待たなくては出来上がらなかったかは，拡張された人の感覚でその内容がはっきりと見える必要があった．現在は，道具を使って数学概念を見ることができることを数学教育で如何に生かすかが問われている．微分を見ることは最近では，あまり真新しいことではなくなった．再確認をするためにグラフを示す．



曲線の一部を拡大



曲線上に異なる２点を取り直線を作る準備



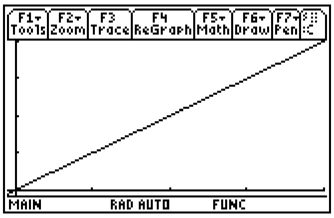
直線と曲線との比較（元に戻すとまったく異なる）

２．歩いてグラフを作る

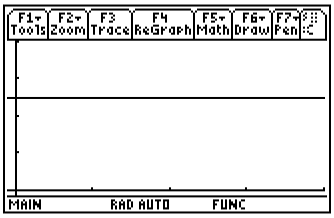
大学生がセンサーの前を歩いてグラフを作りことに，授業を行う方が抵抗を感じていた．このような実験をしなくても，グラフの意味はわかると考えてきた．しかし，実際にグラフを書くことができないことは，次の問題を出すことによってわかる．

問題　時速 4km で点 A から B まで歩いたグラフを書け
　　　点 C 地点で止まっているグラフを書け
　　　時速 4km で点 B から A に戻ってくるグラフを書け

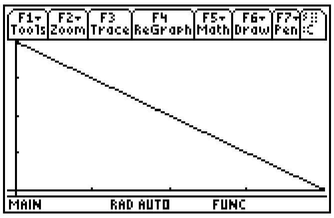
特に，止まっているグラフは一点で止まってしまう．グラフがどのような意味を持っているのかを理解させることに，CBL を使った実験は効果があった．グラフの意味を「体」で覚えこむことができる．



4km/h 点 A から B

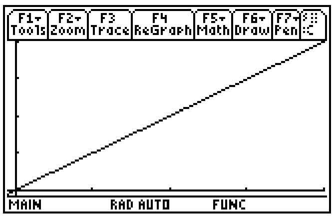


点 C で止まっている

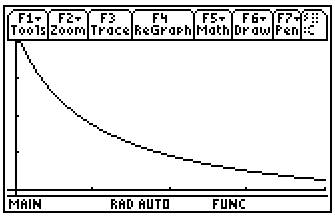


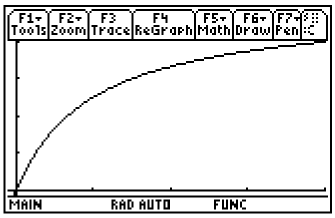
4km/h 点 B から戻る

このようなグラフを書くことによって，速度は傾きで表現されることを学び，マイナスの速度は戻ってくることがわかる．当然知っているに違いないという考えは捨てたほうが残念ながらよい．何も知らない学生に驚きを与える授業をすることが望まれているに違いない．ここに示されているグラフは，一本の道を歩いている人の位置を示しているグラフであって，速度を示すグラフを作り出すことによって，直線での変化は速度一定ということがわかり，だんだん早くなるグラフ・だんだん遅くなるグラフも簡単に理解できるようになった．



速度一定のグラフ

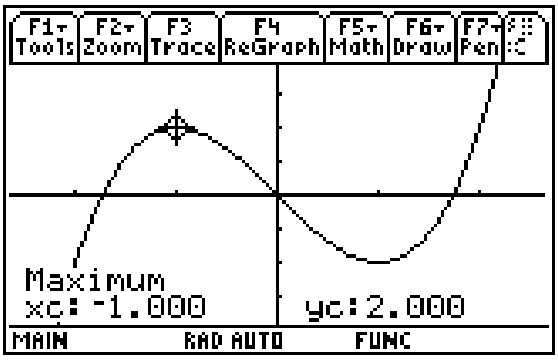


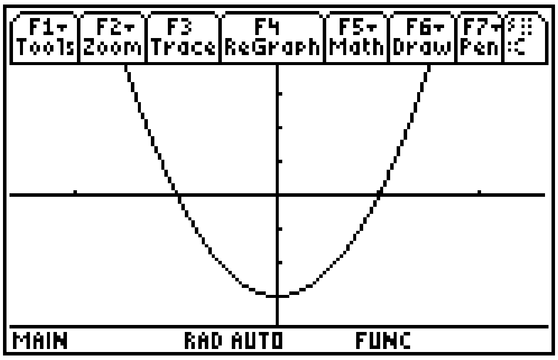


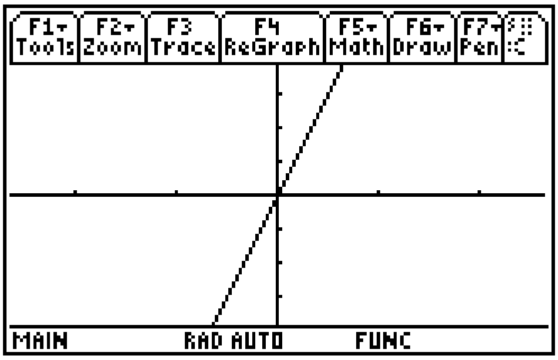
だんだん遅くなるグラフ

3.$y=x^3-3x$のグラフとその意味

歩いている人を想定して，場所のグラフとして$y=x^3-3x$のグラフを与える．どのような歩き方をしているかの｢物語｣を作ることは実際に歩いてグラフを作った後では易しい．この関数を微分したグラフが速度を示すグラフである．グラフがマイナス（x軸より下）のときに，戻ってきていることもわかる．



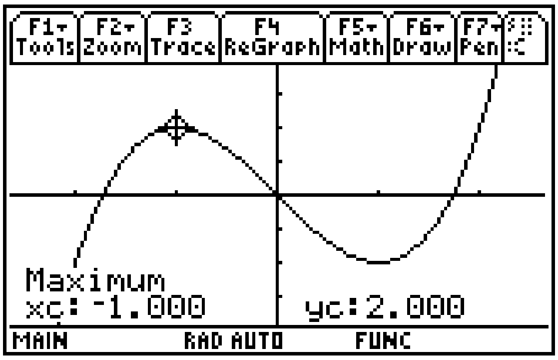


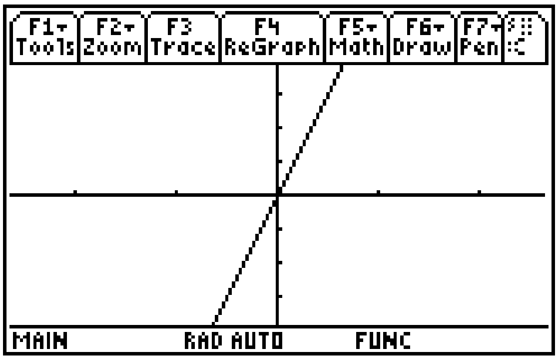


このグラフで興味があったのは，加速度がマイナスであるにもかかわらず，速度は速くなることがあるかという問題であった．速度がマイナスのときに，どの１に在るときに最も速度は大きいかを理解してはいない．グラフが下に行くにしたがって，数字は小さくなることと，速度の大きさとの関係は残念ながらよくわかっていない．

具体的には$-1<x<0$のとき，加速度はマイナスであるが，速度はだんだん速くなっている．また，同じようなことが$0<X<1$でも不思議な現象が起こっている．どち

らに進むときにプラスとしているかを決めておくことの重要性もわかる．計算はできても，その意味がわかっているであろうか．歩いている方向と速度・加速度の問題をきちんと理解しておくことによって，計算することが必要になってくる．しかし，現在の数学教育では，計算ができてもその意味を理解できていないのではないか．この図によって，理解することの重要で威を示す．

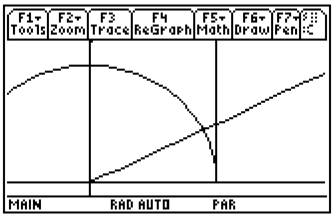


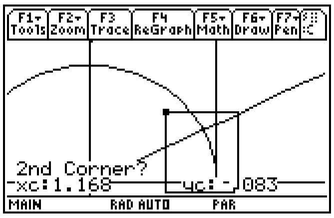


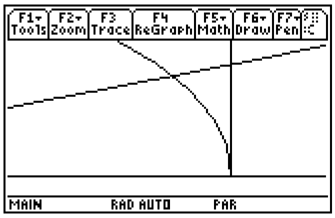
４．観覧車から三角関数の微分を推測する

三角関数の微分を計算するためには角度の単位をラジアンにすることは重要である．しかし，なぜ，ラジアンかは説明が乏しい．微分の計算をしてしまえば後は角度の単位はラジアンではほとんど考えていない．角度の単位をなぜラジアンにするのかをあまり強調しても，具体性に乏しいのではないかと思われる．それにもかかわらず，角度の単位を変える必要性を授業では当然強調する．この角度がラジアンである必要性を見せることから，三角関数の微分の計算を見せることができることを示したい．

$\sin x/x \to 1$　を見る

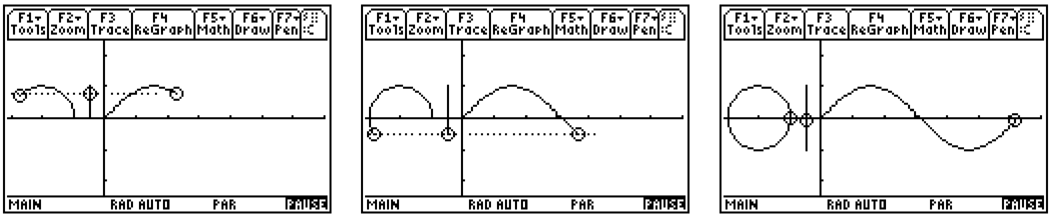






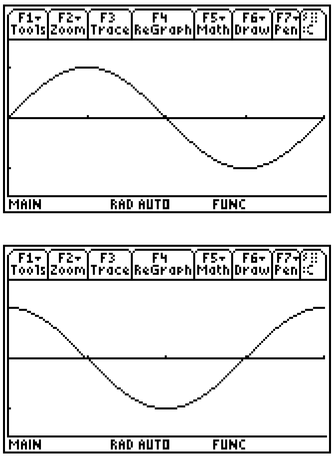
ラジアンを用いて，弧の長さｘと sinｘとの比較をする

ｙ=sinｘのグラフを定義に従って書く



三角関数の定義は円周上を動く点を真横から見る

歩いている人の位置をグラフ化したもので，このグラフから歩いている人の速度を考えグラフを作ってみる．この速度の最大値は１とすると、ｙ＝cosｘのグラフが見えてくる．位置と速度の関係から，三角関数の微分が計算をしなくてもわかる．



対応する点と歩いている様子を考える

５.数学教育の目的は何か

グラフ電卓を使うことを前提とした数学教育は，今までの数学教育が目指していた目的とは異なってくる．計算技能の熟練は必要が無い．しかし，計算ができるということは，現在でも数学ができると思い込んでしまうことには注意が必要である．計算はグラフ電卓に任せても，数学能力には影響は無い．数学=計算と考えて数学をとらえてきた，今までの数学教育は「計算」ということを考えても，大きく変化せざるを得ない．また，グラフを書くこともグラフ電卓は簡単である．微分の活用はグラフを書くことであったならば，数学で微分を学ぶことの目的も半減する．グラフを眺めてどのようなことがわかるかを，推測することは重要な課題である．数学教育がグラフを書くことを重視したことは，グラフを見て関数の変化の状態を知ることができたのであり，この目的はもっと重要になる．グラフの外形を書くことによって終わってしまった数学教育は，グラフ電卓とともにグラフを書くことによって始まるのである．ここに数学教育のこれからの目標がある．グラフを見て，そのグラフか語りかけてく

ることがわかることを目標とした数学教育が始まっている．このような目で社会を見ると，グラフが使われ始めていることがわかる．新聞には円グラフ・棒グラフ・折れ線グラフなどが使われてきた．今まで以上にグラフ表現を使った記事がある．このようなグラフを見て，何がわかればよいかを訓練したい．数学教育は計算の訓練であると言う神話は崩れた．そして，また，論理的訓練ということも崩れ去っていく．直感的な現象理解が大きな意味を持ってくるならば，これからの数学教育は，大きく変わっていくに違いない．微分という概念が見えることを，歩くという現象を前提にして考えた．そこには数学という抽象的な学問に対して，具体的な実際例が常に存在している．抽象的に出来上がってしまったことを追いかけるのではなく，具体的な現象を見ながら，実験的な数学が可能になった．ここに創造性育成の機会が与えられる．グラフ電卓が創造という活動の補助になっていることを知ると同時に，数学に接して楽しいということを重視する教育を作り上げたい．

６．参考文献

(1) 渡辺　信　微分を見る　第 2 回福井グラフ電卓の会　2002

(2) 渡辺　信　数学の視覚化の重要性　第 4 回 T3-Japan　P.134-137　2000

(3) 渡辺　信　目で見る微分－グラフを利用してみたら－　第 3 回 T3-Japan P.76-81　2000

(4) 渡辺　信　目で見る微分－グラフを利用してみたら－　第 2 回 T3-Japan P.8-13　1998

(5) 渡辺　信　グラフ電卓を生かした数学教育のあり方　第 1 回 T3-Japan P.24-27　1997