数学で扱う物理の問題

石川工業高等専門学校　　澤田　功,　阿蘇和寿

1　はじめに

近似という言葉から連想される物事について, 物理と数学の教員ではその評価に違いがあることと思います。確からしい手続きという評価から厳密さの欠ける手続きという評価まで, ばらつきは大きいでしょう。しかし, 2 つの科目における認識の違いがあるからこそ, 私たちはそれを議論することにが, 物理と数学の文化に掛ける橋の建設を目指すことになると考えました。つまり, 数学寄りの物理の授業, 物理寄りの数学の授業をなんとかして教室に持ち込もうという狙いです。

2　問題の設定

問題設定は以下の通りです。

穴の深さ y_0 [m] を測定するために穴の口から物体を落とし, 下に到達するまでの時間 T [s] を測定することによって, それを見積もることを考えます。井戸の深さや橋の高さであっても構いませんが, 空気抵抗や温度の効果は考慮しません。考慮すれば, 物理の文化がより色濃くなるので, 別の機会に譲ります。

重力加速度の大きさを $g = 9.8$ [m/s^2] とおけば, 時間 T の間に物体が落下する距離 y [m] は

$$y = \frac{1}{2}gT^2$$

として算出されます。しかし, T を視覚的に測定するのではなく, 聴覚的に観測すれば, T には, 物体が穴の底にぶつかってから音が耳に達するまでの時間が含まれるので, この y は真の深さ y_0 からずれて, 大きくなってしまいます。このずれの割合

$$\lambda = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{y}{y_0} - 1$$

を計算し議論するのが, この発表のテーマです。

3　「ずれ」の算出

観測した時間 T を

$$T = t_1 + t_2 \tag{1}$$

と分割します。t_1 は穴の底まで物体が到達するのに要した時間, t_2 は穴の底で生じた音が耳に到達するのに要した時間です。すると真の深さ y_0 について次の 2 つの式が成立します。

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{2}gt_1^2 \\ y_0 = vt_2 \end{cases} \qquad \text{i.e.,} \quad \frac{1}{2}gt_1^2 = vt_2. \tag{2}$$

式 (2) を t_2 について解いて, (1) に代入すれば t_1 に関する 2 次方程式

$$T = t_1 + \frac{g}{2v}t_1^2$$

が得られます。複号の選び方に注意してこの 2 次方程式を解くと,

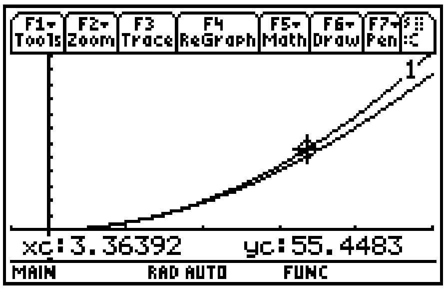
$$t_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gvT}}{g}$$

が導出できますが, これは実測値の T から t_1 を求める式です。すると, T から算出した穴の深さ y, 真の穴の深さ y_0 を次のようにして求めることができます。

$$y = \frac{1}{2}gT^2, \qquad y_0 = \frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{v^2 + 2gvT} - v}{g}\right)^2 \tag{3}$$

4　数学的アプローチ

数学的には式 (3) の時点でこの問題は解決したということになるでしょう。私たちは観測値 T の大きさによって, y の値が y_0 の値からどれくらいずれているかということに興味があるわけですから, これらを T の関数として両者を比較すればよいわけです。音速を $v = 340$ [m/s], 重力加速度を $g = 9.80$ としてグラフを描いてみると, 次のようになります。



$T = 3$ を越えたところで両者の値を探ってみると

$$T = 3.364 \qquad \text{のとき} \qquad y = 55.45,\ \ y_0 = 50.65$$

となって 50 [m] 程度以下の深さの穴ならば, 音が耳に到達する時間を考慮しなくても, 「ずれ」は 10 % 未満であるという結論が出ます。数学の教員の多くがテクノロジーを用いて物理の問題を扱うとき, このようなアプローチが多いように思われます。

5　物理的アプローチ

物理の教員が同じ問題を扱うとき, 次のようなアプローチを行うことになります。t_1 を求める式を

$$t_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gvT}}{g} = \frac{2vT}{\sqrt{v^2 + 2gvT} + v}$$

と変形すれば, ずれを考えるための補助式が次のように書けます。

$$\begin{aligned} \frac{y}{y_0} &= \left(\frac{\sqrt{v^2+2gvT}+v}{2v}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2g}{v}T}\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

さて, 式 (4) から近似を 2 度使いますと,

$$\frac{y}{y_0} \approx \left(1+\frac{1}{2}\frac{g}{v}T\right)^2 \tag{5}$$

$$\approx 1+\frac{g}{v}T \tag{6}$$

が導出できます。式 (5) と (6) で用いた 2 つの近似式

$$\sqrt{1+x} \approx 1+x/2, \qquad (1+x)^2 \approx 1+2x$$

の有効性は $|x| \ll 1$ ですが, これは T を数秒, $v = 340$ [m/s] であるような状況であれば, 妥当です。3 桁もある普通の音速に注意すれば, 通常, 教室で行う実験などでは時間のずれは気にしなくてもよいと思っているはずです。したがって, 真の値 y_0 が測定値 y からどの程度ずれているのかが評価できます。つまり, 次のような評価が得られたことになります。

$$\lambda = \frac{y}{y_0} - 1 \approx \frac{g}{v}T \tag{7}$$

6 むすび

6.1 物理の教員から

式 (7) が得られた時点で, 物理として重要なことが 2 点あります。まず, ずれが測定値 T の 1 乗に比例している。T の 2 乗ではありません。そして, 比例係数が 9.8/340 [Hz = 1/s], つまり, およそ 0.3 [Hz] である事です。単位に気を付ければ, $T = 3$ 秒程度で, ずれは 0.1 程度になり, 10 % の誤差が生じている事がわかります。前節のおわりに ‘気にしなくともよい’ と書きましたが実は気にしていて, 実際に計算してみて, ほら大丈夫だったと安心するのです。そしてその安心の範囲を確かめるわけです。このように, 物理では近似とそれに伴う定性的かつ定量的な議論が大切になります。

ところで, ずれを表現するのにも 2 通りの方法があります。いまの場合にあてはめますと絶対的な $y - y_0$ と相対的な $(y - y_0)/y_0$ です。どちらを優先するのかが数学と物理の文化の違いでしょう。

(1) **定量的側面からのコメント**

数学的アプローチにはウインドウの中に生ずるずれを視覚的にとらえようという方向性だと思いますが, いまの場合, y 自身が日常生活で親しんでいるメートルという単位ですので, 教育的に評価できます。しかしながら, 単位のついていない数そのものの変化を見るときには, ウインドウの倍率を変えれば視覚的にずれがなくなったり拡大したりしてし

まいます。物理の教員の一人としては, ずれを扱う教材では相対的な表現を付け加えることを希望したいと思います。

(2) **定性的側面からのコメント**
実はずれが T の 1 乗に比例することが分かりましたが, これを見て, 近似以前には $1 - e^{aT}$ の項が含まれていないのだなあ, とも心の奥底では思っています。数学の文化では何を思うでしょうか。

6.2 数学の教員から

数学の立場からすれば, すでに解析的に解かれているものに対して, わざわざ近似する必要があるのだろうか, という気持ちにさせられます。もちろん, 実現象を扱うわけですから, 最終的にどのような結論が得られたかということを示すために近似値を使うのはごく自然なことです。しかしその場合も最後まで解析的に議論を進めて, 結論の部分で近似を使おうとするように思われます。ずれの割合 λ の計算も 2 乗ぐらいは手で計算し, しかる後に $k = g/v$ とでも置いて

$$\lambda = \frac{y - y_0}{y_0} = \left(\frac{\sqrt{v^2 + 2gvT} + v}{2v}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(kT + \sqrt{1 + 2kT} - 1\right) \approx kT$$

のような計算をするでしょう。近似式を 2 回用いたとき, その誤差がどの程度になるのでしょうか。そこはかなり気になるところです。

しかし, 物理的なアプローチでは, この問題に取り組む時点から, ずれの割合が T に比例するということ, さらに, 比例定数が何に依存して決まるかということを突き止めようとする意図があるように感じられます。数学では単に重力加速度 g と音速 v とに依存するということ, $v \to \infty$ のとき $y/y_0 \to 1$ であることだけを確かめて, それ以上の計算をしようとは思わないのが普通ではないでしょうか。

もう一度, 物理的アプローチの方法を眺めてみると, この近似式の使い方とそれによる結論 (7) はなかなか見事です。物理においてそのような使い方をするならば, 近似式を 2 回用いたときの誤差の範囲ぐらいは算出できるようにしておかないと, 「使える数学」を教えていることにならないのではないか, というのが正直な感想です。

6.3 おわりに

私たちは物理的・数学的アプローチの優劣を問いたいわけではありません。近似式を用いるかテクノロジーを用いるかということもケー・バイケースでしょう。ここで私たちは「物理と数学の教員が同じ問題を共有し議論することはほとんど行われていない」ということを指摘したいと思います。物理と数学の教員は違いますが学ぶのは同じ生徒です。数学と物理の教員が互いの立場を越えて議論を重ね, 2 つの文化に橋を架けることが, 生徒の中に, 数学によって物理の問題を解決すること, 数学を物理的な視点から解釈することなど, 多様な能力を育てることになります。そして, それこそが私たちの目指しているものではないでしょうか。