

GRAPESで幾何に挑戦

- 折り鶴の数理、四角形の重心 -

奈良女子大学文学部附属中等教育学校
大西俊弘

1. はじめに

「GRAPES」は、大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久氏が開発されたグラフ作成ツールであり、<http://okumedia.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/>からダウンロードすれば、誰でも使用できるフリーウェアである。「GRAPES」は、多機能でかつとても使いやすく、教師のプレゼンテーションの道具としても、生徒の数学的な探求の道具としても有効なソフトウェアである。

「GRAPES」の最近のバージョンでは、単なる関数のグラフ作成にとどまらず、ベクトルが扱えるようになった。具体的には、ベクトルに関する関数（「分点」、「交点」、「垂線の足」、「外心」、「内心」、「垂心」、「重心」等）の追加が行われ、幾何学図形を簡単に扱えるようになった。本稿では、従来は作図ツール（「Cabri geometre」、「Geometer's SketchPad」、「Geometric Constructor」等）を用いて実践されていた課題をその程度「GRAPES」で扱えるか検証する。

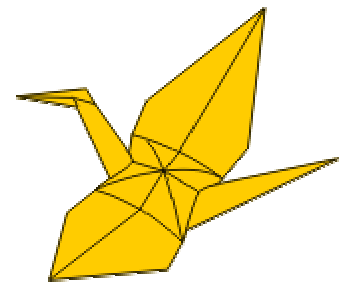
2. 折り鶴の数理

図1のような折り鶴は、日本の伝統的な折り紙であり、日本人であればほとんど誰もが知っている馴染み深いものである。子供の頃に折り紙で作った経験から、折り鶴は正方形の紙でしか折れないと思いつている人が多い。しかし、折り鶴は、正方形以外の紙でも折ることができるのである。

折り鶴を広げて、折り線について数学的に解析した研究には、伏見⁽¹⁾や堀井⁽²⁾のものがある。それらによると、紙を4つの三角形に分割し、その4つの三角形の内心を結んだ折り線をつけることができれば、どのような形の紙であっても折り鶴を折ることが可能である。

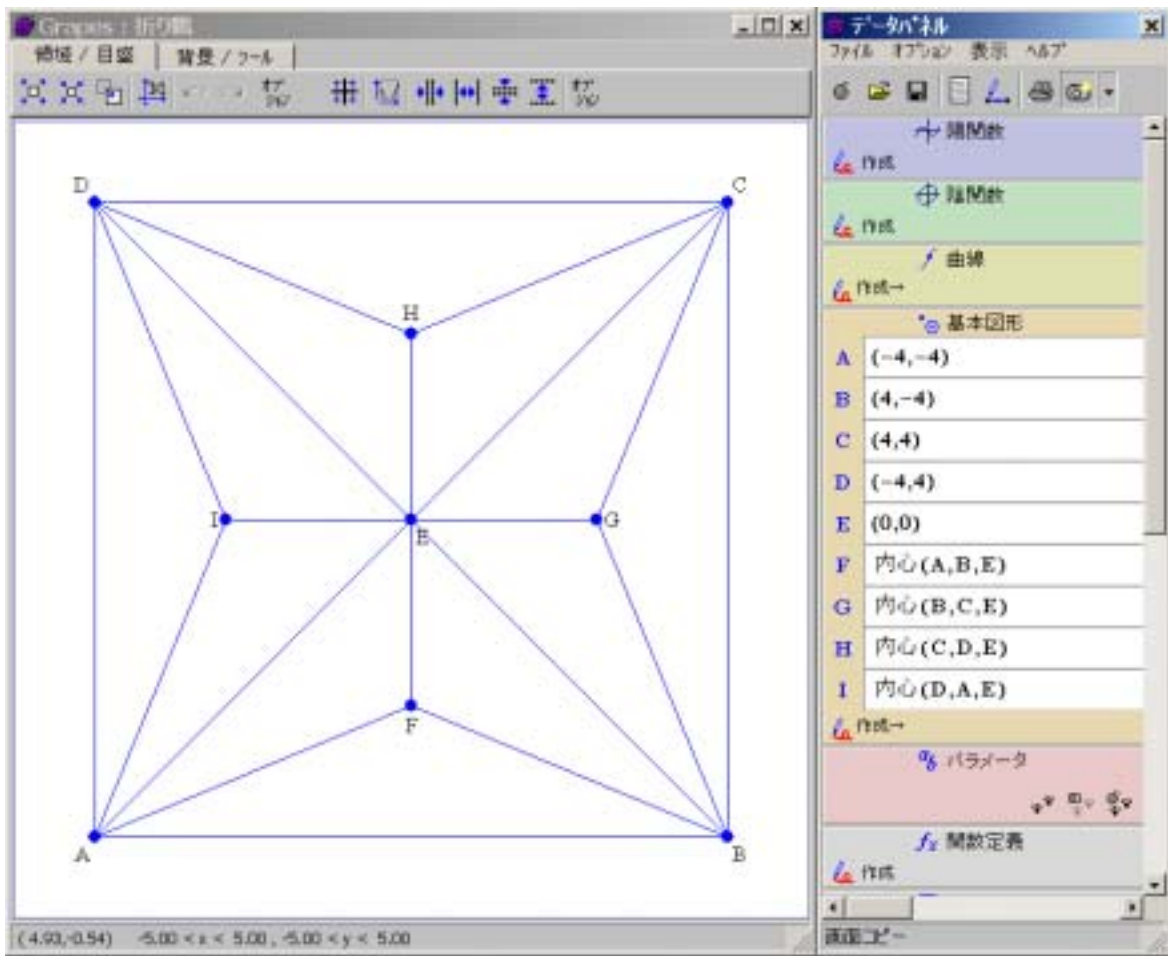
例えば、図2は、通常正方形の折り紙の場合の折り線の図である。折り鶴の折り方から考えると、辺AF、BFは、それぞれEAB、ABEの二等分線であるので、点FはABEの内心となる。同様に点G、H、Iも、それぞれBCE、CDE、DAEの内心である。図2のような折り線を付けることができさえすれば、伝統的な折り方以外の折り方をしても、折り鶴を作ることができる。

作図ツールを用いると、図2の頂点A、B、C、Dを任意の位置に動かして、変形することができる。そのとき、点F、G、H、Iが各三角形の内心となるように設定しておけば、任意の四角形に対する折り鶴の折り線を簡単に得ることができる。この題材を扱った作図ツールを用いた実践には、林⁽³⁾の「Cabri geometre」を用いたもの、堀尾⁽⁴⁾らの「Geometer's SketchPad(GSP)」を用いたものなどがある。

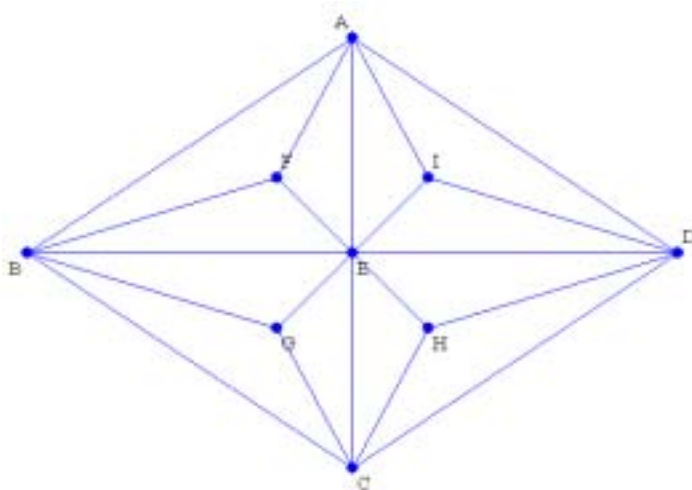


【図1】折り鶴

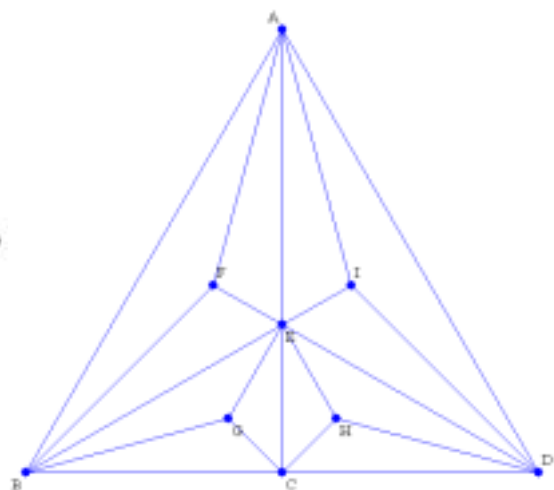
作図ツールではなく、「Grapes」を用いて描いたのが、図2である。最初の4点A、B、C、Dを設定する際には、座標を入力する必要があるので、作図ツールを用いる場合よりもやや面倒である。しかし、内心に関しては作図ツールで設定する場合と手間は変わらず、また画面右のデータパネルを見ればどういう点を設定しているのかが一目瞭然となる利点がある。一旦図が描けてしまえば、あとは各頂点をドラッグして変形できるのは、作図ツールと同様である。



【図2】GRAPESを用いて描いた折り鶴の折り線（正方形の場合）



【図3】菱形の場合の折り線

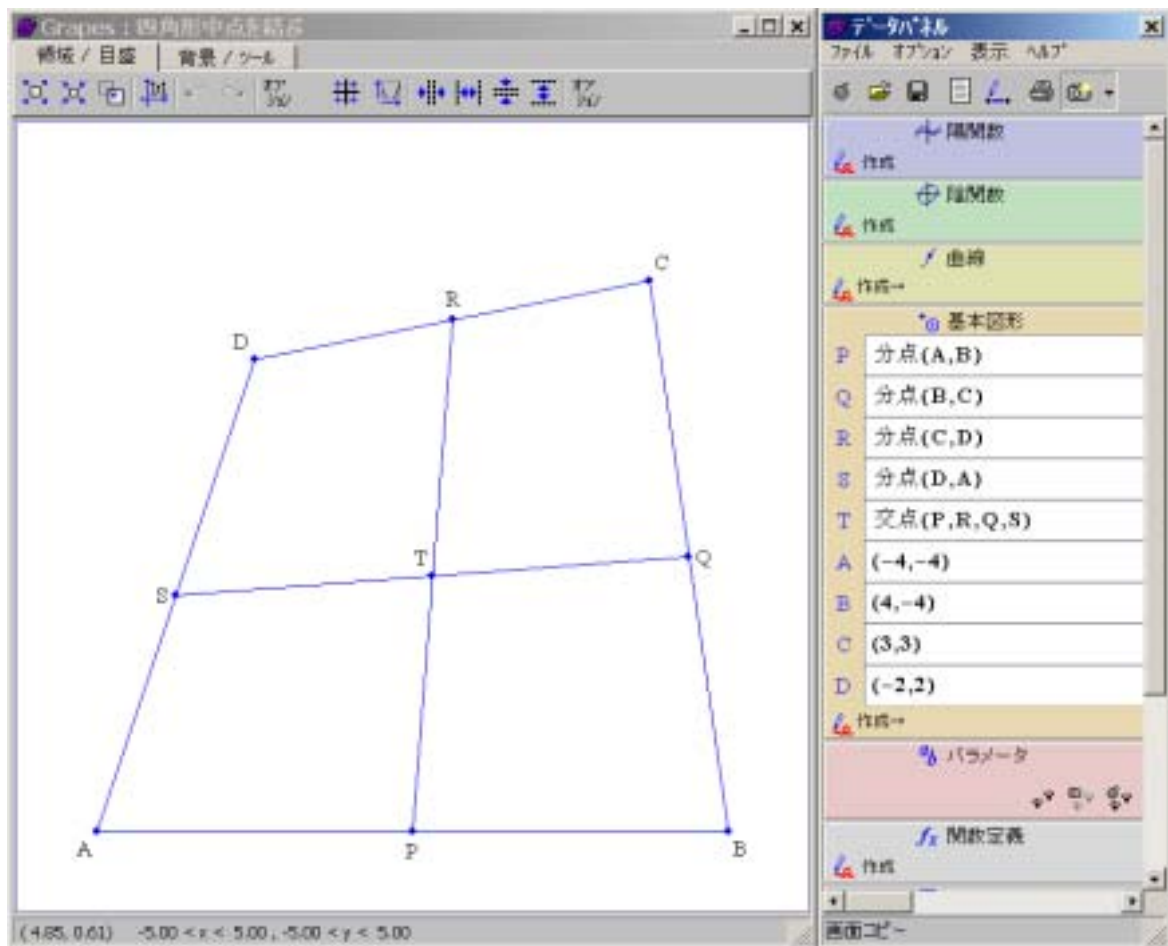


【図4】正三角形の場合の折り線

3. 四角形の重心

三角形の重心について学んだ後に、「四角形や五角形の重心はどうやって求めるのだろうか」と考察することは、数学の拡張の例としてごく自然なことである。生徒に「四角形の重心はどうやって作図すればよいか」と尋ねてみると、「対角線の交点である」とか、三角形の場合との類推から「各辺の中点を結べばよい」とかといった意見（仮説）が出されることが多い。私（大西）⁽⁸⁾は「四角形のコマを作ろう」というテーマで、「Geometer's SketchPad (GSP)」を用いて、それらの仮説のうちどれが正しいか検証する授業を行った経験がある。今回は、その授業で行ったものと同じ作業を「GRAPES」を用いてできるかどうか試してみた。

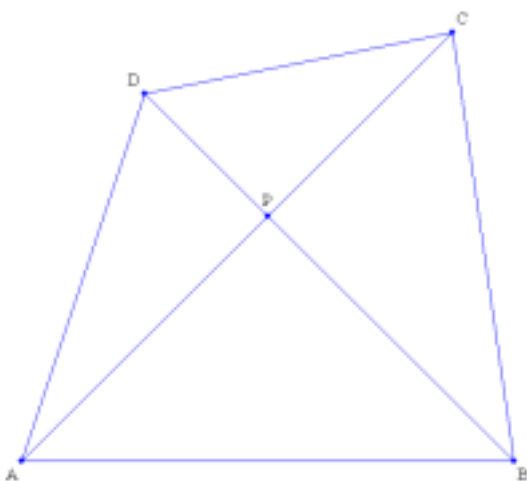
図5は、「4つの辺の中点を結ぶ2本の線分の交点が、四角形の重心である」という生徒から出された仮説を、「GRAPES」を用いて描いたものである。図6・図7は他の仮説の例である。果たしてどの仮説が正しいか（正しくないか）の考察を行う際に、私は作図ツールの変形機能を用いて考察した。「GRAPES」を利用しても作図ツールと全く同じように、頂点をドラッグして変形できるので、特に不具合はなかった。



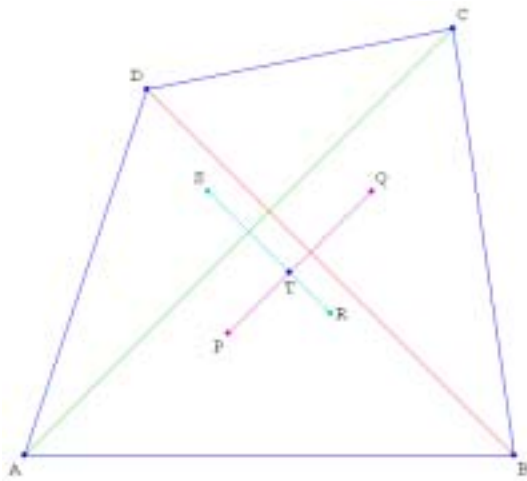
【図5】四角形の重心（仮説1）

なお、仮説の検証は次のように行った。例えば、図5で頂点Cを頂点Dに近づけていくと、四角形ABCDは三角形ABDに近づいていく。このとき、もし点Tが四角形ABCDの重心であれば、三角形ABDの重心に近づいていくはずである。しかし、図5の場合にはそうはならないので、点Tは重心でないことが分かる。

それに対して、図7の場合には、点Tが、ABDの重心である点Pに近づいていくことが確認できる。
 (頂点Cを頂点Dに近づけていく代わりに、点Cを線分BD上に近づけて考えてもよい)



【図6】四角形の重心(仮説2)



【図7】四角形の重心(仮説3, 正解)

4. おわりに

「GRAPES」を用いて比較的簡単に幾何学図形を作図することができることが分かった。データパネルを見れば、各点がどのように設定されているかが簡単に分かることは、作図ツールにはない長所といえる。新課程では、三角形の5心は高等学校の「数学A」で扱うことになったが、市販の作図ツールを購入しなくても「GRAPES」でかなりのところまでできることを多くの高等学校の先生方に知って頂きたいものである。

参考文献・URL

- (1) 伏見康治・伏見満枝 「折り紙の幾何学」 日本評論社
- (2) 堀井洋子 「折り紙と数学」 明治図書
- (3) 林恵津雄 「鶴が折れるという図形の性質の探求」 じっきょう数学資料 NO.39
- (4) 堀尾直史 「いろんな折り鶴を折ろう！」
<http://www1.sphere.ne.jp/holynet/oridzuru/oriduru1.html>
- (5) 岡山大学教育学部附属中学校 数学科 「折り鶴の秘密を探ろう」
<http://www.fuzoku.okayama-u.ac.jp/ml/kyouka/math/orituru.html>
- (6) 熊本県阿蘇長陽村立長陽中学校 数学科 「折り鶴を折ろう！」
<http://aso.jhs.choyo.kumamoto.jp/jhs/subjects/math/tulu/tulu1.htm>
- (7) 堀尾直史 「三角形の紙で折り鶴を折ろう」 T^3 Japan 第2回年会
- (8) 大西俊弘 「四角形や六角形のコマを作ろう」 T^3 Japan 第5回年会
- (9) 宇治野忠博 「四角形のコマを作ろう！」
http://www.mnet.ne.jp/~ujino/s_4koma.html
- (10) 飯島康之 「四角形の重心」
<http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc/world/4-jushin.htm>
- (11) IES 「10角形の重心」
<http://www.ies.co.jp/math/cabri/cabrijava/geometry/collinear/Center10-gonJ.html>