

21世紀の数学教育

上野 健爾

2003年8月2日

はじめに

この地球上に生命が現れて30億年以上たって、わずかに数百万年前に人類の祖先が現れた。そしてホモ・ザピエンスが歴史に登場してからそれほど時間がたっていない。生命史の観点からはほとんど時間の経過が感じられない人類史であるが、20世紀の人類の活動を通して、人類の存在自体が地球環境に大きな影響を与えるまでになった。21世紀は、そのような観点からは人類史の特異な時代になろうとしている。人類自体が単に生き残れるかだけでなく、この地球とどのような調和をもって生存していくかが問われようとしている。特に、教育に携わる者は、未来の主人公に何を託するのか、個々人の生き方そのものが問われている。

しかし、こうした人類の危機的状況にもかかわらず、日本の教育はきわめて異常である。いわゆる有名校への合格の多寡が教育の成果としてもはやされて、多くの大人がそれに何の疑問も抱いていない。大学での勉強も含めて、学校教育を通して自己の学びをどのように深めていくかが問われている危機の時代に、何とも情けない状況である。

数学教育もこうした状況と無縁ではない。特に、自分で読むだけでは、算数・数学を理解することが不可能になってしまった教科書で学ばなければならない小学生・中学生の置かれた状況は悲惨である。この悲惨な状況にどのようにして対処していくか、教育関係者の知恵が求められている。

1 数学の役割

古代の各文明で数学が発達してきたことは、数学が文明と切り離せないものであることを語っている。それと共に、数学には常に遊びの要素を含んでいた。このどちらをなくしても数学は数学でなくなってしまう。

今日の科学・技術文明を支えているのは数学である。それは、決してプラスの側面のみを持つものではない。人工衛星を使って地上の様子を詳しく解析できるのも、精密誘導爆弾で標的近くに爆弾を落とすことができるのも、数学が発達したためである。もちろん、数学だけではなく、他の科学・技術の発達も必要であるが、ハイテク兵器は単なる試行錯誤の産物ではなく、その基礎に数学があることを忘れてはならない。日本の学習指導要領が言うように「数学の良さを分からせる」ことが大切なのではなく、現代の科学・技術文明を支える数学の役割を、その負の側面も含めて正しく伝えることが21世紀の数学教育では重要になってくる。

そして、大切なことは、こうした科学・技術を支える数学の多くは、最初は応用とは関係のないところから始まり育っていったという事実である。複素数にしても、有限体にしてもすべ

ては純粋に数学的な遊び、楽しみから始まった。遊びこそ人間活動の基本である。

2 数学を楽しむ

誰でも経験していることであるが、何ごとをマスターするにせよそのことに夢中になって楽しむことが一番の早道である。二千数百年前に孔子は「之を知るものは之を好むものに如かず、これを好むものは之を楽しむ者に如かず」と簡潔に表現している。このような、素晴らしい古典を私たちは持っているにもかかわらず、教育関係者が古典に親しむことが少なくなっていることは残念なことである。教育の基本は論語にすべて語られているといっても過言ではない。

では数学を楽しむには何が必要か？ 難しい数学を理解するために刻苦勉励した暁に、数学を楽しむことができるようになるのであろうか。そのような楽しみ方もあるかもしれない。と言うよりは、これまでの学校教育はともすれば、生徒に努力を強いてこなかったであろうか。「努力すれば報われる」という言葉を高校生が言うのをときおり耳にするが、それはがんばって受験勉強をすれば大学に合格できるということの言い換えにすぎない場合が多い。実際の社会では「努力しても報われない」のが当たり前ののだが。数学の勉強でも「努力しても報われない」方が多い。しかしうまくいかないと、努力が足りないとして片づけられることが多いように思われる。だが、理想は努力したことを意識しないほどに夢中になることではなかろうか。数学を楽しむために本当に必要なことは、好奇心である。どのようにして好奇心を育てるか、それが数学教育の一番の課題でもある。

3 巨人の肩にのって

好奇心を持つためには自ら面白いことに会う必要がある。面白こと、不思議なことをいくら見せられてもそれだけでは面白いとは感じられない。理科離れをなくすために多くの人たちが面白い実験を工夫して公開しているが、子ども達の注意を一時的にしか引かないのは、自分でそれ以上のことを工夫することが難しいからである。

物理学上の素晴らしい成果をあげたニュートンは自分の活動を「巨人の肩にのった」おかげではるか先を見通すことができたと言ったと伝えられている。また、自分の研究を「海辺で夢中になって美しい貝殻を集めている子供」にもたとえている。この両者は少しも矛盾しない。現代の進んだ科学・技術文明のもとでは「巨人の肩にのる」のは簡単である。そして、遙か遠くを望んだつもりが、ごく近くのものしか見ていなかったとしても、自分の力で美しい貝を見つけたことができれば、これほど楽しいことはない。単なる計算の道具としてではなく、発見の道具として電卓を使うことは、数学教育にとって重要なことである。特に、難しいことを考える道具としてどのように電卓を活用するかが重要である。

これからの中学校、高校では筆算が満足にできない生徒が大量に進学してくる。(現在の大学生で、すでに驚くほど計算力が落ちている。) だから易しいことばかりを扱っていいのか、いまから真剣に考えておく必要がある。次のアランの言葉が参考になろう。

幾何学の美しさは、証明の諸段階があること、全体にわたって明瞭なしっかりした何かがあるということにある。そこで、球やプリズムがわれわれに実物教育を与えてくれればよいと思う。だれに？ すべての人にだ。ある子供が幾何学を理解するのに苦労しているからといって、彼には幾何学がわからずじまいになってしまうだろうと決めてしまうのはおかしい話だ。そのことは、むしろ反対に、彼をそこには

いらせるために根気よくやる必要があるというしるしである。タレスは今日の幾何学の全部を知っていたわけではなかったが、自分が知っていることはこれを十分に知っていた。このように、必然性に関するどんなわずかな知見でも一生涯を通じての光明となるであろう。だから、待ち遠しく思ったり才能を測ったりなどしなされるな。ただ「これが必要なのだ」とだけ言いなさい。(アラン著作集7 教育論 一九 p.66、八木冕訳、白水社) 01/06/27

ところで、先生自らが数学を楽しむことがなかったら、数学教育は成り立たない。生徒に何をどう教えるかのまえに、自分は数学の何をどう楽しむかが問われなければならない。例として、円周率 π にまつわる話題と循環小数の性質を使った面白い計算法を紹介する。前者は電卓やコンピュータを使っておおいに楽しむことが可能である。しかし、循環小数を使った計算は、電卓を必ずしも必要としないどころか、使い方を間違えれば逆効果になる。遊びにも工夫が必要なことは言うまでもない。

4 円周率と三角関数

問題 4.1 円に内外接する正多角形の周の長さを計算することによって円周率の近似値を求めよ。

直径1の円に内接する正 n 角形の周の長さを p_n 、外接する正 n 角形の周の長さを P_n 、と記そう。これらの数値と直径1の円に内接する正 $2n$ 角形の対応する数値 p_{2n} 、 P_{2n} の間には関係

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}, \quad P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}$$

がある。さらに、円周率の計算で重要なことは

$$p_n < p_{2n} < p_{4n} < \cdots < \pi < \cdots < P_{4n} < P_{2n} < P_n$$

が成り立つことである。

問題 4.2 円周率の計算で関孝和、建部賢弘、劉徽の計算を追体験し、彼らの計算結果をさらに精密なものにせよ。

関、建部は数列の加速(エイトケン加速、リチャードソン加速)を使って円周率の計算をおこなった。劉徽は内接正多角形の計算だけから円周率の評価ができることを示した。

一方、三角関数を使えば、

$$p_n = n \sin \frac{\pi}{n}, \quad P_n = n \tan \frac{\pi}{n}$$

と表示できる。

問題 4.3 関数電卓や三角関数表を使って円周率を求めよ。さらに、三角関数表はどのようにして作られるのかその原理を考え、三角関数表を作成せよ。

三角関数表の最初の形はプトレマイオス著「アルマゲスト」にある弦の表である。プトレマイオスは実質的に正弦の表を作ったことになる。初等幾何学を応用した計算で表を作ることができる。「アルマゲスト」は日本語訳(藪内清訳「アルマゲスト」恒星社厚生閣)があるので、

それを読んで、プトレマイオスにしたがって表を作ってみよう。電卓を使って表を作るのは奇妙に見えるが、計算の原理を理解するために必要なプロセスである。

また、三角関数のテイラー展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

を使った数値計算も行え。

問題 4.4 正弦関数の無限級数を展開を有限の項で切つてできる多項式のグラフをコンピュータを使って描け。

多項式でなぜ周期関数が近似できるのか、その不思議さを考えてみよう。さらに、逆に複雑な関数を三角関数を使って近似する（正確にはフーリエ級数）ことができる不思議さを考えてみよう。そのためには有限フーリエ級数の種々のグラフを描いてみるのが有効である。

以上の話題は様々な方向へと展開していくことができる。本で勉強することも大切だが、文明に利器を使って大いにはばたき、夢をふくらませることが可能な話題である。無限級数は難しいなどと考える前に、グラフを描き、計算を試みることである。数学は「手を動かす」ことによって発展してきた面が大きいことが納得できるであろう。

5 循環小数

しかし、文明の利器に頼りすぎると本質が見えないことも起こる。どのように「巨人の肩にのる」かを考えることこそ大切である。すべての有理数は循環小数で表すことができる。逆に循環小数に表すことのできる数は有理数である。循環小数を考えるには無限和

$$1 + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^n + \dots$$

を考える必要が出てくる。無限の不思議さを実感するよい機会である。

問題 5.1 純循環小数を分数 q/p , p, q は共通因数を持たない整数、で表したとき、 p と 10 とは共通因数を持たないことを示せ。

問題 5.2 正の分数 q/p , p, q は共通因数を持たない整数、を小数に直した時の循環節の長さを求めよ。また、 10 と p とが共通因子を持たないときに限って純循環小数として表示できることを示せ。

循環小数を使った面白い計算がある。例えば $\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}$ を使えば

$$456 \times 167 = 456 \times \left(\frac{1000}{6} + \frac{2}{6} \right)$$

と考えると、 $456 \div 6 = 76$ を使うと、答えは $76000 + 76 \times 2 = 76152$ であることがすぐ分かる。こうした計算は位取り記数法の原理や仮分数の計算がなぜ大切かを学ぶよい題材である。数値感覚を養成するためにこうした面白い計算を種々工夫する必要がある。