数ナビで見る物理の問題

石川高専　　阿蘇和寿

物理の問題が扱うのは現実の世界である。物理の問題解決を行ったとき，その解が一体どういうものなのかをどうやって「見る」のでしょうか。扱い慣れた先生ならいざ知らず，習っている生徒や学生たちは，結果を見ずに納得できるものでしょうか。ここではいくつかの例を使って「見る」ことの意義を考えます。

1　トランポリンの問題

トランポリンの運動では, 演技者がトランポリンを離れる少し前が最も速く, やがて減速して頂点に達し, 向きを変えてトランポリンに戻ってくる。トランポリンに接している間に速度を回復し, 再び最高の速度となって上方に飛び上がっていく。

ここでは, 演技者がトランポリンに接しているときの運動と, トランポリンを離れているときの運動とに分けて考えよう。上方を正の方向とする。

1.1　演技者がトランポリンに接しているときの運動

ここでは高さを x [m] で表し, 設置されたトランポリンの面の高さを $x=0$ とする。また, 空中を運動していた演技者がトランポリン面についた瞬間を $t=0$ とする。トランポリンに接しているときの運動はばねの運動を同じと考えられるから, 演技者に加わり力は, 重力とフックの法則にしたがう力の和

$$F=-mg-k\,x \quad (k \text{ はばね定数})$$

である。ニュートンの運動方程式 $F=m\alpha=m\dfrac{dx^2}{dt^2}$ から 2 階線形微分方程式

$$m\frac{dx^2}{dt^2}=-mg-k\,x$$

が得られる。特殊解は $x=-\dfrac{mg}{k}$ であるから, この方程式の一般解は

$$x=A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{mg}{k}$$

となり, これに初期条件 $x(0)=0,\ v(0)=x'(0)=-v_0$ [m/s] を加えると

$$x=\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{mg}{k} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

1.2 演技者がトランポリンを離れているときの運動

これはよく知られた自由落下運動である。$t=0$ において速度 v_0 [m/s] で飛び上がるとすれば,

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。ここで, 最高高度を h [m] とすれば

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \qquad \text{i.e.,} \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$

が成り立つ。

1.3 条件の設定

ここで次の設定を行う。

- $g = 10\ \left[\mathrm{m/s^2}\right]$ ：重力の加速度
- $h = 2$ [m] ：演技者の最高高度
- $m = 50$ [kg] ：演技者の体重
- $x_0 = -0.1$ [m] ：演技者が静かにトランポリンに乗ったときのトランポリンの面

すると次のようにばね定数 k と初速度 v_0 が算出される。

- $k = 5000\ \left[\mathrm{kg/s^2}\right] \quad (\because\ mg = k \cdot x_0)$
- $v_0 = 2\sqrt{10}$ [m/s] $\quad (\because\ v_0 = \sqrt{2gh})$

1.4 1 周期分の解

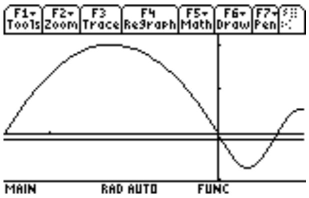
演技者がトランポリン面を離れてから, 再び接するまでの時間は $t = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ である。また, 演技者がトランポリンと接している時間を t_0 とすれば, 次のように定めれば 1 周期分の解が得られる。

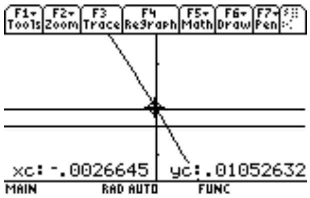
$$x(t) = \begin{cases} 2\sqrt{10}\left(t + \dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right) - 5\left(t + \dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2 & \left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{5} \leqq t \leqq 0\right) \quad \cdots \quad \text{(A)} \\ x = \dfrac{1}{10}\cos 10t - \dfrac{\sqrt{10}}{5}\sin 10t - \dfrac{1}{10} & (0 \leqq t \leqq t_0) \quad \cdots \quad \text{(B)} \end{cases}$$

確かに解は求まったといえる。(A) は 2 次関数 ② のグラフと同じであるし, (B) のグラフは $x = -0.1$ を中心とする単振動である。しかし, これだけでは演技者がトランポリンと接している時間 t_0 は分からないし, そもそも, 2 つのグラフ (A) と (B) が滑らかに接続しているかも気になる。解けたのだけど, どんな運動なのかが分からなくては話にならない。

1.5　物理現象を見る

(A), (B) の関数を数ナビ[1]で描いてみる。$x = -0.1$ はトランポリンの面状の運動のときの振動の中心である。拡大してみると $t = 0$ のところで滑らかに接続していることが分かる。

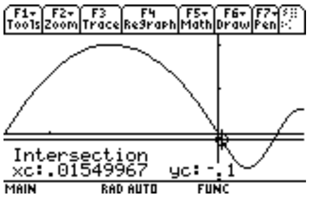


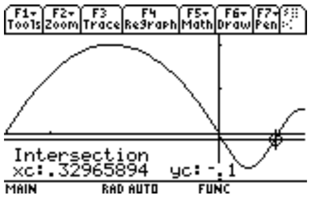


この振動の周期は $\dfrac{2\pi}{10}$ のはずであるから, $x = -0.1$ より下にある区間の幅は $\dfrac{\pi}{10} = 0.314\ldots$ のはずである。交点を読んで引き算をしてみると

$$0.329\ldots - 0.015\ldots = 0.314\ldots$$

となって, 確かにそうなっていることが分かる。

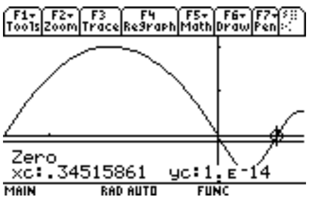


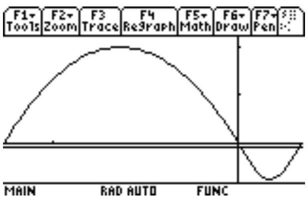


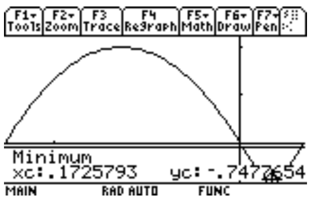
次に, t 軸とグラフとの交点を読んで見ると

$$t_0 = 0.345\ldots$$

である。これが演技者とトランポリン面が接していた時間であることが分かる。画面を微調整して, 最小値を読むと $x = 0.747\ldots$ であり, これがトランポリンが沈んだ距離である。





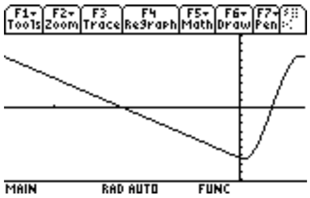


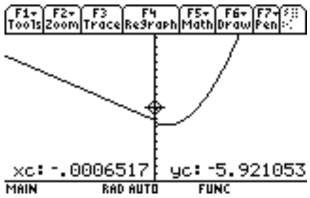
物理の問題を解く, ということは, このような確認がなされなければならないということであろう。①, ② でも, (A), (B) でも, 数式だけではとても十分とはいえない。

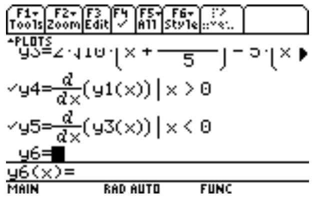
1.6　さらに速度と加速度を見る

元々は速度から位置, 速度から加速度を求めるということを目指していたので, (もちろん微分すればいいのであるが) 数ナビによって速度を見てみよう。ここで, 三角関数部分は微分すれば 10 倍程度の大きなになることが見込まれるので, ウインドウズを $-9 \leqq x \leqq 9$ としてみよう。微分するのも数ナビの役割である。

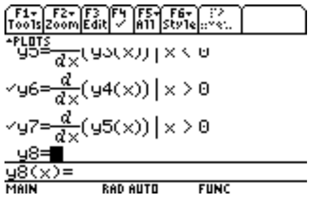
[1] グラフ電卓 TI-89 Titanium, texas Instruments 社

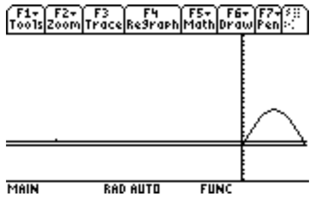






さらに加速度を見てみよう。振幅はさらに 10 倍になることが見込まれるので, ウインドウズは $-80 \leqq x \leqq 220$ と, 最初の設定のちょうど 100 倍にしておく。すると次の画像が見られる。





このグラフの $t \geqq 0$ の部分は, 最初の画像の $t \geqq 0$ の部分と向きが逆になっていて, 形は同じである。それはとりもなおさず, フックの法則 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ に $m = 50$, $k = 5000$ を代入した式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -100x$$

を確かめたことになっていることに注意したい。

2　抵抗のある放物運動

ここでは次の問題を考えよう。

初速度 v_0 [m/s] で水平に投げ出された物体が, 速度に比例する抵抗を受けて行う運動について, 次の問いに答えよ。ただし, 空気抵抗の比例定数を λ [Ns/m] 重力の加速度を $g \approx 9.8\ \left[\mathrm{m/s^2}\right]$ とせよ。

(1) 投げてから t 秒後の, 水平方向の飛距離と落下距離とを求めよ。

(2) 落ちるまでに十分に長い時間がかかるとき, 落下する地点までの水平距離と落下する速さを求めよ。

物体の速度を $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$, 位置を $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$ とする。ただし投げ出して地点を $(0, 0)$ とし, 垂直上方を正の方向とする。

2.1　水平方向の運動

水平方向には速度に比例した抵抗 $F_x(t)$ が働くから, 微分方程式

$$ma_x(t) = -\lambda v_x \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\lambda}{m} v_x$$

が得られる。これは変数分離形の微分方程式

$$\frac{1}{v_x}\, dv_x = -\frac{\lambda}{m}\, dt$$

であるから, 与えられた初期条件から次の解が得られる。

$$v_x(t) = v_0\, e^{-\frac{\lambda t}{m}}$$

これを積分すれば, 初期条件 $x(0) = 0$ から水平方向の飛距離 $x(t)$ が得られる。

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_0\, e^{-\frac{\lambda \tau}{m}}\, d\tau = \frac{m v_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{m}}\right)$$

2.2　垂直方向の運動

垂直方向には重力の加速度 g と落下速度 $v_y(t)$ に比例する抵抗とを受けるから, 働く力は $F_y(t) = mg - \lambda v_y(t)$ となるから

$$m\, a(t) = -\lambda v_y(t) - mg \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\lambda}{m} v_y - g = -\frac{\lambda}{m}\left(v_y + \frac{mg}{\lambda}\right)$$

が得られる。これも変数分離形の微分方程式

$$\frac{1}{v_y + \dfrac{mg}{\lambda}}\, dv_y = -\frac{\lambda}{m}\, dt$$

であるから初期条件 $v_y(0) = 0$ から次の解が得られる。

$$v_y(t) = -\frac{mg}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{m}}\right)$$

これを積分すれば落下距離が求められる。

$$y(t) = y(0) - \int_0^t \frac{mg}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda \tau}{m}}\right) d\tau = -\frac{mg}{\lambda}\left(t + \frac{m}{\lambda} e^{-\frac{\lambda t}{m}} - 1\right)$$

2.3　終端速度

十分長い時間がある, というの, 水平方向の運動は抵抗のため速さが 0 になっていき, 垂直方向の運動は重力と抵抗が釣り合って速さが一定になっていくということを意味する。数学では $t \to \infty$ のときの極限値を求めよ, ということである。落下するまでの距離は

$$x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{m v_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{m}}\right) = \frac{m v_0}{\lambda}$$

となる。(たとえば投げる地点を高くして) どんなに時間をかけても, 物体はこれ以上は遠くに飛ぶことはない。また垂直方向の速さは

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = -\lim_{t\to\infty} \frac{mg}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{m}}\right) = -\frac{mg}{\lambda}$$

に近づいていく。これを終端速度という。

2.4　条件の設定

ここで, バドミントンのシャトル (羽根) の運動を想定して, 次の設定を行う。

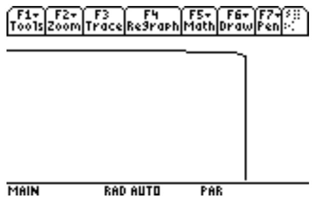
- $g = 10\ \left[\mathrm{m/s^2}\right]$　: 重力の加速度
- $v_0 = 80\ [\mathrm{m/s}]$　: シャトルの初速度
- $m = 0.005\ [\mathrm{kg}]$　: シャトルの質量
- $x_\infty = 8\ [\mathrm{m}]$　: コートの全長 $13.4\,m$ だがそれまでに失速する

すると次のように抵抗の係数 λ が算出される。

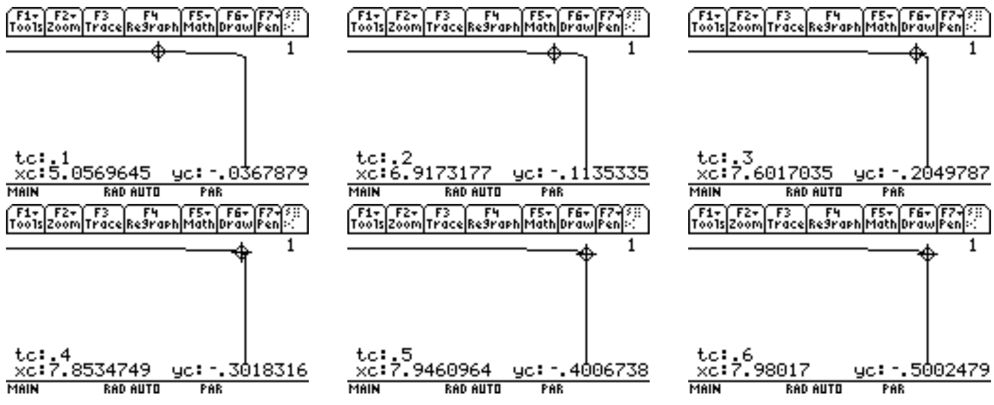
- $\lambda = 0.05\ [\mathrm{kg/s}]$　$\left(\because\ \dfrac{mv_0}{\lambda} = x_\infty\right)$

2.5　バドミントンのシャトルの運動を見る

これをグラフ化したのが下の図 $(0 \leqq x \leqq 10,\ -10 \leqq y \leqq 1)$ である。抵抗がなければ, 初速が 80 [m/s] だからほとんど直線上に見えるだろう。



下は 0.1 秒ごとのシャトルの位置である。0.3 秒間で水平方向の運動はほぼ止まり, そこから垂直に落下していく。



2.6　おわりに

物理を学ぶ者が, 計算結果を確かめたり, 微分方程式を解いて得られた運動の軌跡がどのようなものか見る, 不可欠のことだと思われる。グラフ電卓研究会には数学の教員が多いような気がするが, むしろ物理や工学の学習の中でこそ大きな力を発揮すると思われる。