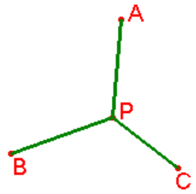
平面における最短連絡網

清真学園高校　小室久二雄

平面上に２点 A,B が与えられたとき，２点を結ぶ最短のものは線分 AB である．

平面上に３点 A,B,C が与えられたとき，３点を結ぶ最短である連絡網は，△ ABC の内角がいずれも１２０°より小であれば，△ ABC のフェルマ点 P により AP+BP+CP で与えられることが知られている．



平面上に４点以上の点が与えられたとき，これらの点を結ぶ最短連絡網は，石鹸水の性質を利用して求められることは知られている．しかし，いくつかの例を調べ，最短連絡網の性質を調べようとすると，石鹸水を利用することはいささか不便である．ここでは，cabri 2 を用いて最短連絡網を作る方法を紹介する．ご存知の通り，cabri 2 は図形を動かすことができ，さらに石鹸水のように壊れることがないので，最短連絡網の性質を調べるのに非常に便利である．

本稿の内容は次の通りである．

まず，３点の最短連絡網より，考え方の土台となることを解説し，その上で４点の最短連絡網を実際に作り，いくつかの命題を証明する．さらに，５点，６点，７点の場合に最短連絡網を作り，８点以上の場合単純な連絡網（最長辺を除いた辺による連絡網）しか存在しないことをしめす．

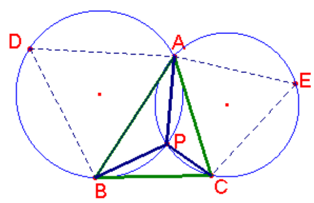
第１章　３点の最短連絡網

ここで考えようとしているのは次の内容である．

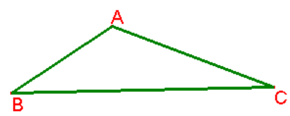
問題　平面上に３点 A,B,C が与えられている．このとき，PA+PB+PC を最小とする点 P を求めよ．

この問題の解答を定理の形で書くと次のようになる．

定理　（１）△ ABC の内角がすべて 120°より小さいとき，PA+PB+PC を最小にする点 P は，各辺 AB,BC,CA を見込む角が 120°である点である．



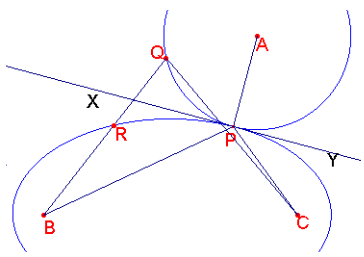
（２）△ ABC の１つの角が 120°以上のとき，その頂点を A とすれば，PA+PB+PC を最小にする点 P は点 A である．すなわち，AB+AC が PA+PB+PC の最小値である．



証明

（１）まず，必要条件から調べる．

点 P が条件を満たす，すなわち PA+PB+PC を最小にする点とする．A を中心とする半径 AP の円 C をかき，さらに２点 B,C を焦点とする楕円を少しずつ膨らませ，C と接するようにようにする．P が条件を満たすなら，円 C 上の点 Q のうち BQ+CQ を最小にする点で



あるから，点 P は円と楕円の接点である．したがって，楕円の性質より

$\angle APB=\angle APC$

が成り立つ．これは BP でも成り立つから結局

$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$

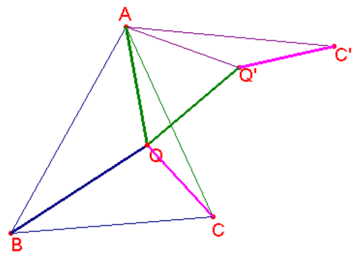
が成り立つことが分かる．

逆に，点 Q を平面上の任意の点とする．△ AQC を点 A の周りに 60° 回転しそれを△ AQ'C'とする．このとき，△ AQQ'は正三角形であるから

$AQ=QQ', QC=Q'C'$

を得る．したがって，

$AQ+BQ+CQ = BQ+QQ'+Q'C' \leqq BC'$　　・・・①



一方，Q が

$\angle AQB=AQC=120^\circ$

を満たすとき，4 点 B,Q,Q',C'は一直線上にあり①の不等号は等号になるので逆が成り立つ．

（２）∠ A ≧１２０° のとき任意の Q に対して

$AQ+BQ+CQ \geqq AB+AC$

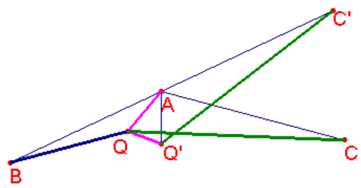
が成り立つことを示せばよい．

右の図の△ AQ'C'は△ AQC を点 A の周りに１８０° －∠ A だけ回転したものである．

∠ QAQ'＜６０° より QQ'＜ AQ．したがって，

$AQ+BQ+CQ > QQ'+BQ+Q'C' \geqq BC'=AB+BC$

以上で証明された．

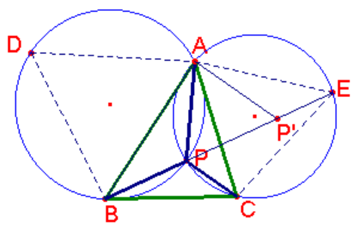


これから議論を進める上で必要な用語の定義をする．

定義

△ ABC の内角がすべて 120° より小さいとき，各辺 AB,BC,CA を見込む角が 120° である点を△ ABC の**フェルマ点**という．

フェルマ点の作図は，右図のように，三角形の外側に正三角形を２つ作図し外接円の交点を求めればよい．また点 P が△ ABC のフェルマ点のとき，



$AP+BP+CP=BE$

が成り立つ．なお，点 E は△ ABC の AC の外側につくった正三角形 ACE の頂点．また正三角形 ABD,BCF を考えても同じだから

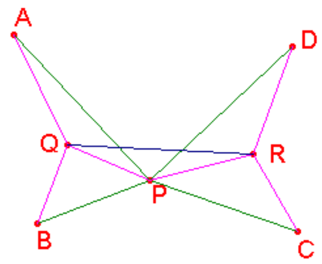
$AP+BP+CP=BE = CD = AF$

が成り立つ．

三角形の連絡網で分かったように，3 点の連絡網は，フェルマ点を用いる場合と，一番長い辺を除いた残りの辺によるものがある．一番長い辺を除いた残りの辺による連絡網を単純連絡網という．

第２章　４点の最短連絡網

ここでは平面上の４点 A,B,C,D の最短連絡網を調べる．なお，この４点は四角形 ABCD が凸となる場合に限定して調べる．凸でない場合は複雑になる．たとえば，３点で考えた最短連絡網の上に他の１点を加えた４点の最短連絡網は最初の３点で決まる．このようなものも一緒に考えることは問題を複雑にするだけだからである．



４点 A,B,C,D を与えたとき，最初に考える連絡網は平面上に１点 P をとることにより決まる

AP+BP+CP+DP

であるが，これは P をどこにとっても最短ではない．

実際，右図で説明すると，△ ABP,△ CDP のフェルマ点をそれぞれ Q,R とすれば

PA+PB ＞ AQ+BQ+PQ,　PC+PD ＞ CR+DR+PR

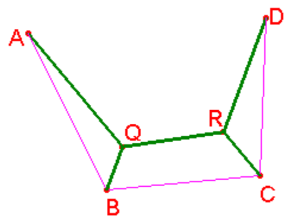
が成り立つからです．さらに

PQ+PR ≧ QR

より

PA+PB+PC+PD ＞ AQ+BQ+QR+RC+RD

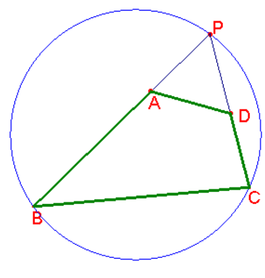
が成り立ちます．この　AQ+BQ+QR+RC+RD　も最短とは限らない．なぜなら△ QCD のフェルマ点を考えることによりさらに短くなるからです．



もし，AQ+BQ+QR+RC+RD が４点 A,B,C,D の最短連絡網なら，Q，R をそれぞれ固定して考えれば分かるように，点 Q は△ ARB のフェルマ点，点 R が△ DQC のフェルマ点でなければならない．すなわち，

∠ AQB=∠ BQR=∠ QRC=∠ QRC=120 °　　・・・①

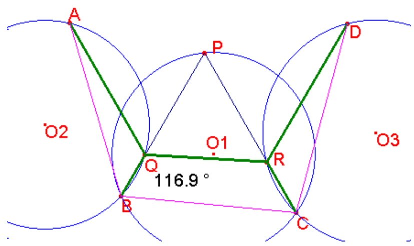
を満たすことになる．右図のように，①を満たす点 Q,R をフェルマ連結点という．また右の連絡網 AQ+BQ+QR+CR+DR をフェルマ連結点を２個もつ連絡網という．



さて，①を満たすすなわちフェルマ連結点をもつ連絡網を作るには次の性質を用いる．

四角形 ABCD で∠ A=∠ D=120 °のとき，AB,CD の延長の交点を P とすると∠ P=60 °である．したがって，P は線分 BC を見込む角が 60 °である円周上にある．

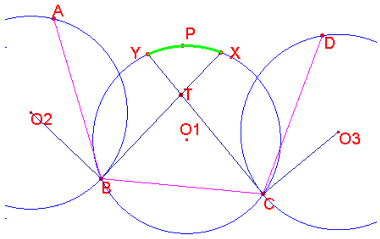
逆に，∠ P ＝ 60 °の△ PBC で辺 PB,PC 上に A,D を PA=PD を満たすようにとれば∠ A ＝∠ D ＝ 120 °の四角形 ABCD を得る．



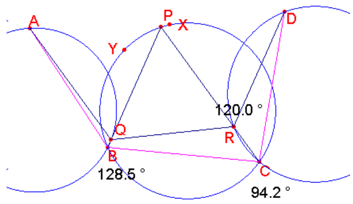
準備が済みました．右図を用いて四角形 ABCD のフェルマ連結点をもつ連絡網が作ることができる．

AD が最長辺の四角形 ABCD で，四角形の内部から見た AB を見込む角が 120 °の円 O_2，CD を見込む角が 120 °の円 O_3，BC を見込む角が 60 °の円 O_1 とし，円 O_1 上に点 P をとる．さらに，BP と円 O_2 との交点を Q,PC と円 O_3 との交

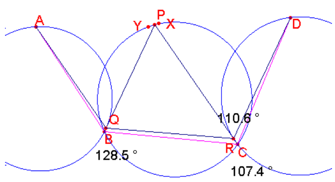
点を R とする．作りかたより，
∠ AQB=120°，∠ CRD=120°
であるから，P を円周上を動かすことにより∠ BQR=120° となれば求めるフェルマ連結点を持つ連絡網である．



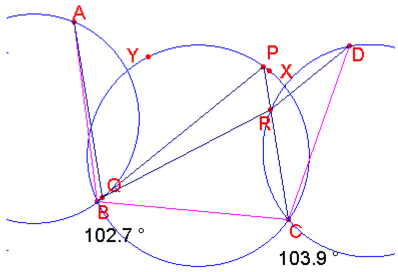
次に，このようなフェルマ連結点を持つ連絡網が作れるための条件を求める．
右図で，XB,YC はそれぞれ円 O_2,O_3 の接線である．XB，YC の交点が円 O_1 の外部にあれば条件を満たす図は存在しない．
　　∠ T=300° －（∠ B+∠ C）
であるから，∠ T ≦ 60° すなわち∠ B+∠ C ≧ 240° のとき，求める連絡網は存在しない．このときには，最短な連絡網は単純連絡網（AB+BC+CD）である．



それでは，∠ B+∠ C ＜ 240° のときどうなるかというと，それほど単純ではない．
右の上図の 4 点 A,B,C,D は∠ B+∠ C ＜ 240° であり，フェルマ連結点を持つ連絡網が存在する場合であるが，真ん中の 4 点 A,B,C,D は∠ B+∠ C ＜ 240° であるが，フェルマ連結点を持つ連絡網は存在しない．

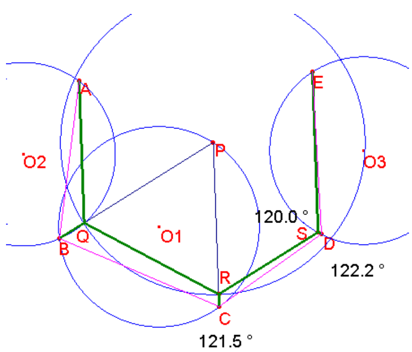


∠ B+∠ C ＜ 240° だけでは，フェルマ連結点を持つ連絡網の存在はいえないが，
∠ B ＜ 120°，∠ C ＜ 120°
を満たせば，フェルマ連結点をもつ連絡網が存在する．
実際右図は，X,Y は BX は左の円の接線，CY は右の円の接線となる点である．P を弧 XY の範囲を動かし，条件を満たす場合を見つけるのであるが，P が X のときすなわち Q と B が一致するとき∠ AQR ＜∠ B ＜ 120°．P が Y のときも同様であり，連続であるから∠ BQR=120° である場合が存在する．



第３章　５点以上の場合の連絡網

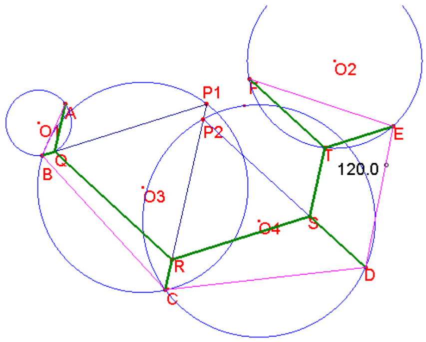
ここでは，５点以上の場合のフェルマ連結点を持つ連絡網を求める．
（Ⅰ）　５点 A,B,C,D,E が与えれ，AE が一番長いときのフェルマ連結点を持つ連絡網は次のように作ることができる．
①　５角形の内部から見て，辺 BC を見込む角が 60° の円を O_1,辺 AB,DE を見込む角が 120° の円をそれぞれ O_2,O_3 とする．
②　円 O_1 上に点 P を取り，PB と円 O_2 との交点を



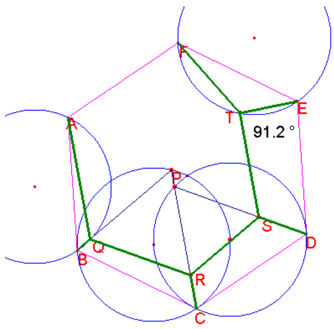
Q,さらに，PC 上に点 R を PQ=PR を満たすようにとる．
③　∠ QRC の２等分線と円 O_3 との交点を S とする．
④　作りかたより，Q,R はフェルマ連結点である．P を動かすことにより∠ RSE=120°を満たす点 S が見つかればそれが求めるものである．

４点の場合の推論で，∠ B，∠ C が共に 120°より大きければフェルマ連結点を持つ連絡網は存在しないように思うかもしれないが，それは間違いである．実際，上の図は∠ C ＝ 121.5°，∠ D ＝ 122.2°であるがフェルマ連結点を３つもつ連絡網である．

（Ⅱ）　６点 A,B,C,D,E,F が与えれ，AF が一番長いときのフェルマ連結点を持つ連絡網は次のように作ることができる．

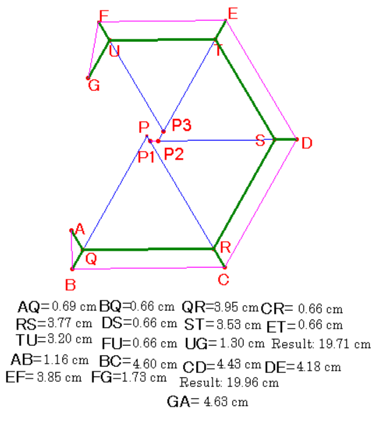


①　６角形の内部から見て，辺 AB を見込む角が 120°の円を O_1,辺 EF を見込む角が 120°の円を O_2 とする．
②　６角形の内部から見て，辺 BC を見込む角が 60°の円を O_3,辺 CD を見込む角が 60°の円を O_4 とする．
③　円 O_3 上に点 P_1 をとり，BP_1 と円 O_1 との交点を Q,P_1C 上の点 R を P_1Q ＝ P_1R を満たすようにとる．
④　P_1C と円 O_4 との交点を P_2 とし，P_2D 上に点 S を P_2R ＝ P_2S を満たすようにとる．
⑤　∠ RSD の２等分線と円 O_2 との交点を T とする．
④　作りかたより，Q,R,S はフェルマ連結点である．P を動かすことにより∠ STE=120°を満たす点 T が見つかればそれが求めるものである．



４個のフェルマ連結点をもつ６点の連絡網は存在するが，６点が正６角形をなすときは，そのような連絡網は存在しない(右図)．実際，上の方法で作ると，P を動かし∠ STE を 120°に近づけようとすると，単純連絡網に近づいていく．

（Ⅲ）７点のフェルマ連結点を持つ連絡網は，７点から作ろうとするとなかなか難しい．しかし，５個のフェルマ連結点を持つ７点を作ることは，連絡網から作ると作りやすい．それは次のように作ればよい．



①　正三角形 PQR をつくり，辺 PR 上に１点 P_1 を取り，正三角形 P_1RS をつくる．
②同様に正三角形 P_2ST,P_3TU をつくる，
③ PQ の延長上に点 B,P_1R の延長上に C,P_2S の延長上に点 D,P_3T の延長上に E,P_3U の延長上に F をとり，∠ PQA=60°，∠ P_3UG ＝ 60°を満たすように A,B,C,D,E,F,G を決めればよい．

（Ⅳ）凸である８点の最短連絡網は必ず単純連絡網であることが言える．実際，単純でない，フェルマ連結点をもつ連絡網があるとすると，それは６個のフェルマ連結点を持つ．右の図形で，８角形 AQRSTUVH に注目する．内角の和は

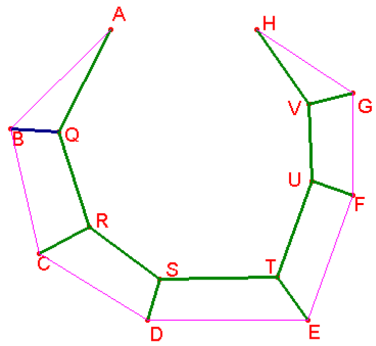
180°×6＝1080°

一方

∠Q+∠R+∠S＋∠T＋∠U＋∠V

＝120°×6＝720°

したがって∠A＋∠H＝360°となり矛盾する．



したがって，８点以上のとき，最短連絡網は単純になる．

あとがき

本文の中では，連絡網をフェルマ連結点をも持つ連絡網といって，最短連絡網とはいっていない．この連絡網が単純連絡網より短いことは cabri 2 の機能を用いて簡単に確かめることができるが,他の連絡網より短いかどうかの確認が必要である．図形的な証明が出来るのかどうかは筆者には分からないが，ここで作った連絡網，すなわち，最大辺を除くことによりつくられたフェルマ連結点をもつ連絡網が最短であるあることは石鹸水の実験で確認してある．

フェルマ連結点をもつ連絡網が存在する条件は４点でさえも私には未解決なところがある．ご教示いただければ幸いである．

本稿の内容は，SSH 数学ゼミとして放課後，生徒とともに行った内容をまとめたものです．特に，実際に cabri 2 で最短連絡網を予想して，石鹸水でそれが正しいことを確認したときの生徒の驚きはとてもすばらしいものでした．普段の授業でも生徒の知的好奇心を導き出す更なる努力必要だと実感したことを思い出します．

数学において，具体例を調べることは重要であるが予想外の困難が付きまといます．その具体例を調べるのに，cabri 2 はまことに優れたソフトです．具体例を通して問題の本質を見つけることが数学の本来の目的の１つであることを生徒には伝えたいと思っている．そのために授業においても，図形ソフトを積極的に活用している．たとえば，初等幾何の問題は，図形を正確に書き図形全体を眺めるだけで解決することが多い．この図を正確に書くことだけでも．すぐに答えを見たがる生徒には効果的な教育の一つである．生徒が考える動機付けをための図形ソフトの活用例をさらに考えたいと思っている．

なお，本稿の内容を含む数学の話題に関しては

ホームページ「ＳＳＨ数学図形ゼミ」

（アドレス:http://komurokunio-id.hp.infoseek.co.jp）

にまとめてあります．参考にしていただければ幸いです．