

大学入試問題による実験数学

関西学院大学 数理科学科 山根英司

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane/yamane@kwansei.ac.jp>

習った問題の類題なら，解法を思い出してなんとか解けます．それでは，初めて見る問題はどうか．こういうときに有効な方法の一つは実験です．できることから実験して手探りで様子を調べると手がかりが得られるので，予想を立て，証明するのです．これを実験数学*といいます．もちろん予想を立てるのも証明するのも人間だし，証明は手計算でやります．

今日は大学入試問題から題材を取って実験数学の入門をします．別に受験対策をするつもりはないのですが，高校数学で面白い題材を見つけようと思ったら，大学入試問題を調べるのが手っ取り早いのです．

— 金沢大学 —

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ -r & 0 \end{pmatrix}$ ($r > 0$) と座標平面上の点 $P_0(-1, 2)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$ は，式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする．次の問いに答えよ．

- (1) A^{2k}, A^{2k+1} ($k = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ．
- (2) x_n, y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ．
- (3) 略

対角化に違いないと思いと，手間のかかる計算をする羽目になります．一応やってみましょう．固有値 r に属する固有ベクトル(の一つ)が ${}^t(1, -1)$ で(上付き t は転置を表し，行ベクトルを列ベクトルに変えます)，固有値 $-r$ に属する固有ベクトル(の一つ)が ${}^t(1, 1)$ です．そこで

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

*計算機実験という言葉は昔からありますが，それは数値実験(小数で表された数値による近似計算)のことで，実験数学は数式処理(文字式の計算)を使うものを指します．

とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$ です。右辺の対角行列のべきを偶数乗と奇数乗で場合分けします。そして、左から P 、右から P^{-1} を掛ければ答えが出ます。いちおう解けはしたものの、せっかく A が特別な形をしているのに、このような解法ではその特殊性がどう効いているのかよく分からず、面白みに欠けます。計算してみたらそうなったというだけです。

そこで、今度は既知のパターン(対角化)に当てはめようとするのではなく、まずは実験してみましょう。

$$A^2 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -r^3 \\ -r^3 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} r^4 & 0 \\ 0 & r^4 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 0 & -r^5 \\ -r^5 & 0 \end{pmatrix}$$

から規則性の検討がつきます。証明は帰納法で出来ます。ちょっとしたコツですが、偶数乗の場合、つまり A^{2k} の場合だけを先に帰納法で証明すれば、 A^{2k+1} の場合は直ちに従います。もっとも、帰納法を持ち出すのはちょっと大げさで、 $A^2 = r^2E$ がカギであることに気づけば、 $A^{2k} = (A^2)^k = (r^2E)^k = r^{2k}E$ のように簡単に計算できます。ちょっとした実験をすれば、偶奇による状況の違いに早めに気づくことができ、見通しよく計算できるわけです。

行列は $[a, b; c, d]$ のように入力します。セミコロンは M で出ます。積は \times ですが、 \times を押すと入力行には $*$ が表示されます。

— 京都大学 —

x, y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 (x, y) の範囲を図示せよ。

まずは a_2, a_3, a_4, \dots を電卓で順に求めて、一般項を予想しましょう。実は問題の漸化式を解くためにはよく知られたトリック(両辺を y^{n+1} で割る)がありますが、ここではそれに頼らずに、実験 \rightarrow 予想 \rightarrow 証明 という手順で話を進めましょう。解法を知っていたから解けたというよりも、手探りで解法を見つけ出す方がたくましい感じがします。後者のような態度で数学を勉強する人は、初めて見る問題でも解けるようになるでしょう。そしてゆくゆくは、誰も知らなかった新しい定理・法則を発見したり、新技術を開発したりできるようになるでしょう。

$a_{n+1} = xa_n + y^{n+1}$ は、「直前の計算結果を x 倍して y^{n+1} を加えよ」と解

積できます. Voyage では「直前の計算結果」は $\text{ans}(1)$ で、これは $\boxed{2\text{nd}}(-)$ で出ます. したがって、0 を入力して enter した直後に $x*\text{ans}(1)+y \wedge 2$ とすれば a_2 が求められます. さらに $x*\text{ans}(1)+y \wedge 3$ とすれば a_3 が求められます.

$y \wedge 2, y \wedge 3, \dots$ のように少しずつ書き換えるのが面倒だと思ったら、次のような手があります (中級以上向け). まず $\{1, 0\}$ を入力して enter します. これは $a_1 = 0$ に対応します. その後は $\{\text{ans}(1)[1]+1, x * \text{ans}(1)[2] + y \wedge (\text{ans}(1)[1]+1)\}$ を繰り返し実行します. 一般に、 $\text{ans}(1)[j]$ は直前の結果であるリストの j 番目の成分を表します.

— 大阪大学 (改) —

$f(x) = x^2 e^x$ の n 次導関数を求めよ.

Voyage 200 で微分の計算ができます. $\boxed{F3}$ の微積分メニューで $1.d()$ を選べば微分できます. キーボードショートカットは $\boxed{2\text{nd}}8$ です.

大学生にもよく言うのですが、一般の n に関する話が分からなかったら、まずは具体例を考えてみればよいと思います. 本問の場合は、まず $n = 1, 2$ の場合を計算してみればよいのです. Voyage があれば $n = 10$ でも $n = 20$ でも容易にできます.

— 秋田県立大学 (改) —

n が 0 以上の整数のとき、 $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ について考える.

- (1) I_0, I_1, \dots を求めよ (電卓使用).
- (2) n が 1 以上のとき、 $\frac{I_n}{I_{n-1}}$ の一般項を予想せよ (電卓使用).
- (3) 部分積分を用いて、上の予想が正しいことを示せ (手計算).
- (4) I_n を n を用いて表せ (まず手計算, 電卓で検算).

積分は $\boxed{F3}$ のメニューの中にあります.

注 次の記号 !! が便利です.

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \quad (2n+1 \text{ 以下の全ての奇数の積})$$

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2 \quad (2n \text{ 以下の全ての偶数の積})$$

— 関西学院大学 (改) —

$f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ とおく. Voyage を使って $f_n(x)$ を計算し, 規則性を見つけよ. そしてそれを手計算で証明せよ. ($f_n(x)$ を短い式で書くことはできないが, かなりきれいな規則性は現れる.)

— 慈恵医大 (改) —

$x^n \log x$ の n 次導関数について調べよ. (n 次導関数を短い式で書くことはできないが, かなりきれいな規則性は現れる.)

\ln は自然対数 \log_e のことです (Voyage では数学ではなく物理や化学の習慣に従って \log は常用対数 \log_{10} を表すことになっています).

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane/edu.html> に私家版マニュアル『はじめての数式処理電卓 Voyage 200』を置きました. 高校数学の基本問題を解きながら Voyage 200 の操作を学べます.