

データと関数

福井工業高等専門学校 宮田一郎

はじめに

科学理論は、疑問→仮説→実験→解析→理論→…のサイクルで進歩していると考えられています。実際には科学理論といえども社会に無関係に存在できないので、その時代における社会的背景や偏見からは逃れられないのでこのサイクル以外からも影響をうけるのですが、このサイクルで数学が主に担当するのは解析の部分とされています。ここでは大気中における金属の冷却を例に用いて解析だけではなくこのサイクル全体が本当に回転することを解説します。

金属が冷却する様子を取り上げた理由は①データ収集が容易であること②データが程よく難しいこと③データの質が良いこと④解析の結果、明確な法則が得られる等があります。さらに、数学が最も関わるデータの解析において、数学的知識や技能が増して行くと解析の精度が上がったり、自然と法則が見えてくる様子を解説します。

習得させたい数学的思考方と教材の工夫

① 習得させたい数学的思考方

- ア. データのグラフから関数を予想する。
- イ. データのグラフを表す関数を試行錯誤により求める。
- ウ. 関数のグラフがデータのグラフを復元することを確認する。
- エ. グラフを直線化する。
- オ. データを加工することにより、法則を見出す。
- カ. 最小2乗法により直線を近似する

② 教材の工夫

- ア. テクノロジーを利用することにより、実験データを手軽に収集し、アナログデータをデジタルデータに変換できる。
- イ. データの収集だけではなくデータの解析や、データのグラフを表す関数を求める際にも積極的にグラフ電卓を使用する。

実際の授業

1 疑問 素朴な疑問として、「大気中に放置した金属はどのように冷えていくか？」を考えよう。この問いかけは漠然としているので、グラフの知識を付け加えて問題を明確にすると「金属の温度変化をグラフにするとどんな関数のグラフになるのか？」になる。

2 仮説 1次関数、2次関数、分数関数のグラフか？

3 実験

グラフ電卓に接続ケーブルで温度センサーと CBL を接続して、熱湯につけた温度センサーを大気中に放置し温度センサーが冷却していく様子をデモ実験で見せる。あるいは機材がそろえば各自で実験してもよいでしょう。

実験上の注意

- ① 座標軸の x 軸と y 軸が時間（秒）と温度（℃）であることに注意を喚起する。
- ② 必ず室温を測定する。

4 解析

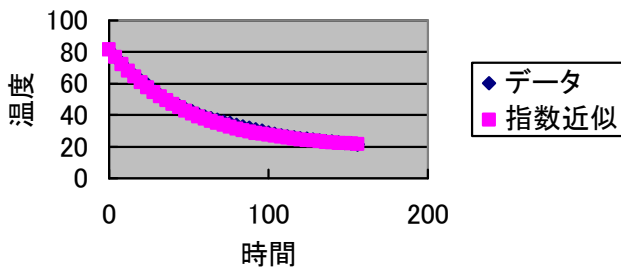
データを表す関数を見つける方法は数学的素養が増すに従って次の4つの段階を踏んで深化していくと考えられます。

- I グラフの形からそのグラフを持つ関数を予想する素朴な方法
- II 対数関数を用いてグラフを直線化する
- III 微分して微分方程式を見つける
- IV 最小2乗法により回帰直線を求める

従来は I のみで終わっていましたが、このデータの特性を考えるとまだまだ活用できると考えました。

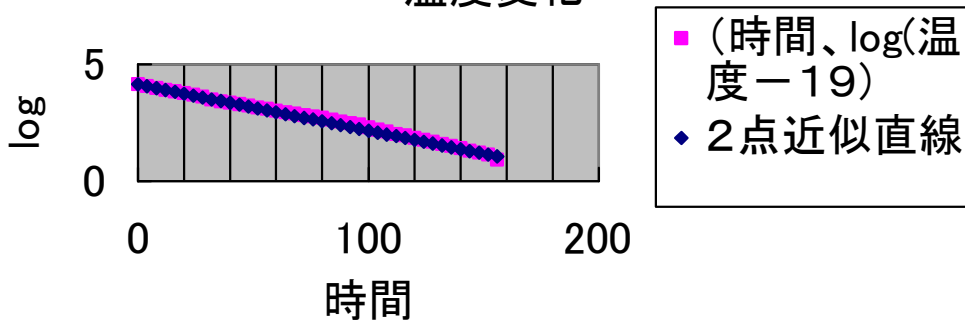
I 初期条件 $y(0)=A$ と境界条件 (室温) $y(\infty)=C$ からデータを表す関数は指数関数 $y=(A-C)*a^x+C$ と予想されます。底 a の値を試行錯誤によってテクノロジーを用いて求めることになります。

データと指数近似



II $y-C=(A-C)*a^x$ より、対数をとると $(x, \log(y-C))$ のグラフは傾きが $\log(a)$ の直線となります。

温度変化



このグラフの上に2点をとって直線の傾き m を求めると $a=10^m$ から底 a の値が求まります。この方法にも2点の取り方に試行錯誤は必要ですが直線が最もたやすく測定できることから I の完全な試行錯誤と比較すると精度の高い試行錯誤であるといえます。また、これらの作業においてはテクノロジーの利用が前提です。

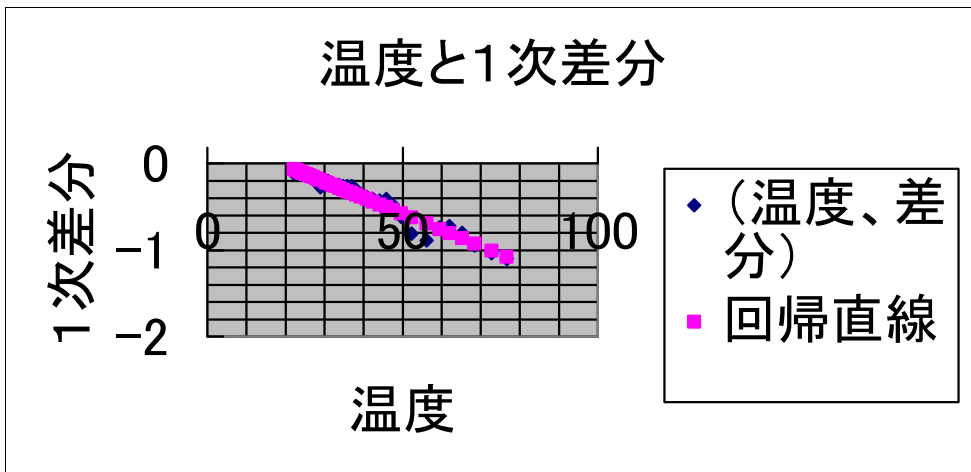
III I と II においては冷却のグラフが指数関数で表される理由が分かりません。グラフの形からテクノロジーと試行錯誤で求めたわけですが。求めてみたら指数関数だったわけです。そこで、

よい法則は微分方程式で表現される

に従って、微分してみましょう。データは微分できないので、差分 $\Delta y / \Delta x$ をとってみましょう。この作業もテクノロジーを用いることになります。すると、 $(y, \Delta y / \Delta x)$ のグラフは傾き m で切

片が n の直線になっています。すると次の差分方程式が得られます。

$$\Delta y / \Delta x = my + n$$



この差分方程式とデータのグラフを表す指数関数の微分

$$dy/dx = \log(a)(y-C)$$

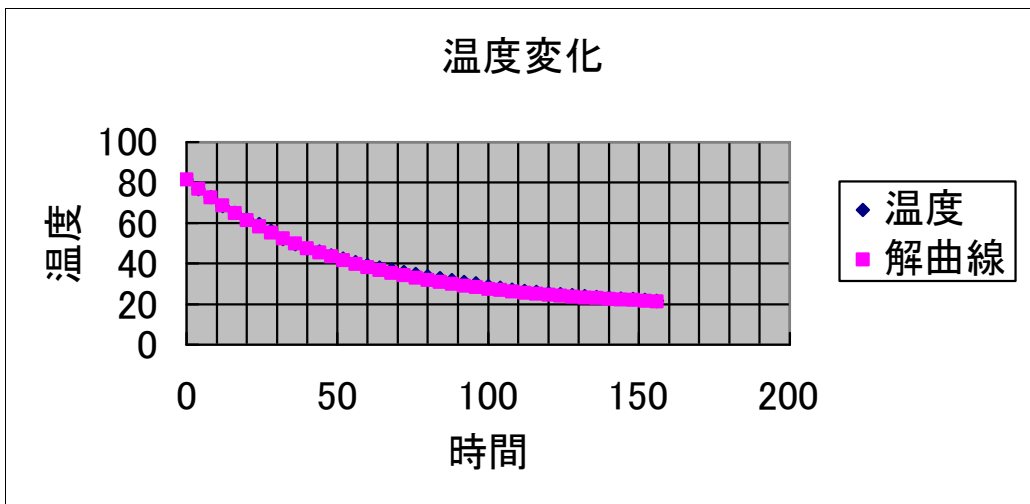
を比較すると、

$$\text{微分方程式 } dy/dx = m(y-C), m = \log(a)$$

が得られます。この微分方程式はニュートンの冷却の法則「冷却していく速度は物体の温度と周囲の温度差に比例する」を表しています。以上から

$$\boxed{\text{直線のグラフ}} \Leftrightarrow \boxed{\text{線形微分方程式}} \Leftrightarrow \boxed{\text{良い法則}}$$

という図式が成立していることも分かります。さらに、テクノロジーによってこの微分方程式の解曲線を求めると



もとのデータをきれいに復元していることが分かります。

この微分方程式は変数分離形と呼ばれるものなかでも最も基本的な微分方程式です。

IV これまで方法ではデータを直線にした後にその近似直線を試行錯誤で求めていました。この試行錯誤を最小2乗法によって取り替えることができます。

5 理論 ニュートンの冷却の法則を再発見することができた。

以上で確かに疑問→仮説→実験→解析→理論のサイクルがまわる様子を解説しました。

まとめ

グラフ電卓、センサー類をはじめとするテクノロジーを十分活用して、1年生で学ぶ指数関数や対数関数、2年生3年生で学ぶ微分と微分方程式、最小2乗法など数学に現れる関数や知識がデータの解析にどのように役に立つかを理解してもらえenと思います。また、数学の知識が深まるにつれてデータを解析する方法も精度をまし、隠れた法則が現れてくる様子も理解されると思います。また、従来あまり行われていないように思われるデータの加工もテクノロジーを用いることにより本当に手軽に行えることも分かってもらえたと思います。

今後の課題

物理現象と関数と微分方程式の対応はその他にもあります。

自由落下	2次関数	$dy/dx=f(x)$
冷却	指数関数	変数分離形
バネ振り子	三角関数	2階線形
稲穂の実り	成長曲線	ロジステック方程式

これらについてもデータを収集しているので、同様な教材としてまとめてみたいと考えています。