数学Ⅲでの対数 eの導入

岡山市立岡山後楽館高校 河合 伸昭

— 音B 対数 数学Ⅱの復習 「作ってみようあなただけの対数表」 対数の原理の理解と記号に慣れる

1.A. グラフ電卓で検算しながら、次の表を完成させよう。

Γ	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8

2 9	2 1 0	2 1 1	2 1 2	2 1 3	2 1 4	2 1 5	2 1 6

B. 暗算で次の値を計算しよう。 (ヒント Aの表を活用しよう)

- (1) 16×32
- ② 32×64
- (3) 256×16

- (4) 128×64 (5) $65536 \div 1024$
 - $6) 32768 \div 2048$
- \bigcirc 1 6 3 \bigcirc 8 $\sqrt{256}$

(9) 3√512

C. マイナス×マイナスはなぜプラスか 考えてみよう

D. 自然数の指数の計算の原則に従って、指数法則を拡張してみよう

- ① 0の場合 ② 負の場合
- ③ 分数の場合

2. 対数の記号の導入

A. 次の式を、対数の形で(log の記号を用いて)表せ。

- (1) $2^{5}=32$ (2) $5^{3}=125$
- (3) 2 $^{-2}$ = 0.25 (3)
- 10 2=100

B. 2. 次の式を,指数の形で(a の形で)表せ。

- ① log 2 32=5 ② log 5 125=3
- ③ $\log_2 0.25 = -2$
- **(4)** log 1 0 100=2

C. 次の値を求めよ。

- ① log 2 8 ② log 5 25
- ③ $\log_{2} 0.5$ ④ $\log_{10} 1000$

D 次の式のxの値を求めよ。

① $\log_2 x = 4$

② $\log_{5} x = 3$

次の式の値を求めよ \mathbf{E}

- ① 2 log 2 8
- ② 5 log 5 10
- ③ 1 0^{log 1 0} 2

F 2を10を底とした指数で表せ

- 3 . 対数の公式を作っていこう
 - A 対数の原理を対数記号を使って、公式の形に整理してみよう 対数の公式を導いてみよう。
 - (1) $\log_a x y =$

 $\log_{a} \frac{x}{y} =$ 2

3 $\log_a x^n =$ 4 $\log_a x y =$

 $\log_{a} \frac{X}{V} =$ (5)

- $\log a X^n =$ 6
- **B** 底の変換公式を導いてみよう。

 $\log ab = x$ として 底を c に変換

C. 次の対数の値をグラフ電卓で求めてみよう

 log_2 3

log 5 7

log 5 7

D. 対数の値をグラフ電卓の対数キーを使わず、求めてみよう 1 の表から $2^{10} = 1 \ 0 \ 2 \ 4 = 1 \ 0 \ 0 \ 0$

これから $\log_{10} 2$ の値を見積もる方法を考えよう ヒント 2 -F

E. 対数の性質を利用して、今まで求めた対数の値から、次の対数の値を求めてみよう

log 104

log 106

log 109

log 1020

log 1 0 2 .1

log 10 5

4 なぜ、教科書の値と、ほとんど同じ値が求められたのか考えてみよう。

第 二 部 数学Ⅲでの対数 eの導入その1

 $\lceil e \, o$ 導入 1 / x 0 積分を探る \rfloor ~そして対数は、元々自然対数だった~

1	不定積分からの疑問	かぜ 1 / x	の積分だけ違うのか
+ .		'A L I / A	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

数学 II で n が 0 以上の整数の時 x n の積分は $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ と表せることを学びました。

数学Ⅲでは、負の数・分数の場合のn (≠-1) についても、x nの積分が予想通り

 $\frac{\mathbf{x}^{n+1}}{\mathbf{n}+1}$ と表せました。ところが $1 / \mathbf{x}$ の積分だけは、特別のようです。

これがどうなるか、グラフ電卓の定積分機能で調べていき増しよう。

2. 定積分の実行

まず \int_{τ}^{-dt} の積分をグラフ電卓で実行しましょう。

操作

内容

1 Y= で積分する関数 1/x を入力

2 GRAPH で関数 の描画

4 Enter で定積分実行

STAT 機能の活用 内容のクリア

1 STAT 統計機能の選択キー

2 | ClearList | で List 内容のクリアを選択 (4 を押しても良い)

3 | 2nd | + | 1 | で L1(1列目)を指定

4 Enter で L1 の内容の消去の実行 L2.L3 も同様に消去

データの打ち込み

STAT 統計機能の選択キー

 2 Edit
 で 編集を選択 (1を押しても良い)

 L1にxの値、L2に定積分の値を打ち込みます。

STAT PLOT 機能の活用

次に、この値をグラフ電卓のプロット機能でプロットしてみます。

1 | 2nd | + | Y= | STAT PLOT機能の選択キー

この画面で ON を選択(選択はカーソルが ON の上で点滅しているときに ENTER を押す) 以下 Type は上段左から二番目、XList は L1, YList は L2 Mark は左端を選択

そして 画面右端の Graph を押すと データをプロットしたグラフが表示される。

3 グラフの 解 釈

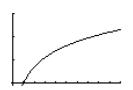
このグラフを見て、生徒に意見を聞いてみます。

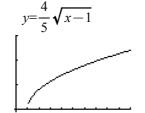
生徒の意見

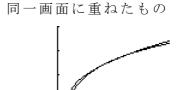
① ②

このプロットしたグラフは、一見無理関数 に似ているように見えます。 生徒に聞いても、無理関数を習ったばかりなので、 という答えが多く返ってきました。 実際、係数を 4/5 とすれば、ほぼ一致しているように見えます。

1/x の数値積分のプロット







二年の対数の授業では、太陽系の惑星の公転周期と軌道半径の間の関係すなわち「ケプラーの第三法則」をグラフ電卓で確認する「**君もケプラー」**という教材をやっています。「君もケプラー」では、2つの量の間にべき乗の関係があるときは、対数を取るとグラフが直線 (線形関係)になることを学びました。ここでも、それを応用してみましょう。

操作 List の対数を一度に取る 対数キー 左側下から4番目 log (1 で L1(1 列目)を指定 2nd 2 データのストア(格納)命令 画面に矢印が表示されます。 $STO \rightarrow$ L2,L3 も消去 でストア(格納)先 L3(3列目)を指定 3 2nd 2 Enter で実行 画面に { } で L3 の内容の一部が表示 4 同様に L2の対数もL4にストア

積分範囲	積分の値	xの対数を	уの対数を
の上端 L1	L2	取った値 L3	取った値 L4
X	У	logx	logy
1.5	0.405465	0.17609	-0.39205
2.0	0.693147	0.30103	-0.15917
2.5	0.916291	0.39794	-0.03797
3.0	1.098612	0.47712	0.040844
3.5	1.252763	0.54407	0.097869
4.0	1.386294	0.60206	0.141855
4.5	1.450408	0.65321	0.16149
5.0	1.609438	0.69097	0.206674
5.5	1.704748	0.74036	0.23166
6.0	1.791760	0.77015	0.25328
6.5	1.871802	0.81291	0.27226
7.0	1.94591	0.8451	0.289123
7.5	2.014903	0.87506	0.304254
8.0	2.079442	0.90309	0.317947
8.5	2.140066	0.92942	0.330427
9.0	2.197225	0.95424	0.341874
9.5	2.251292	0.97772	0.352432
10.0	2.302585	1.00000	0.362216

4 データの間の関係をグラフ電卓を活用して探る

- ① まず L1,L2 の間に比例関係があるかまず視察によって、次に STAT PLOT 機能で
- ② 他の可能性も探ってみる。まず視察によって、次に STAT PLOT 機能で

いろいろプロットしてみると二列目と三列目 すなわち L2(定積分の値)と L3(xの対数) が比例していることがわかります。 1/x の積分は、対数関数で表されるようです。

操作 線形性の確認 LinReg(ax+b) 線形回帰機能

STAT カーソルを一つ右へ移動 CALC へ

3 ENTER で実行(または すぐ 4を押し、ENTER)

画面に LinReg(ax+b) と表示されるので

4 2nd + 2 + , で L2(2列目)を指定

5 2nd + 2 で L3(3 列目)を指定

で実行(または すぐ 4を押し、ENTER)

1

画面に LinReg(ax+b) a と b の値が表示される。

 $y = 2.302585 \log_{10} x$

6

ENTER

* グラフ電卓を使うというと、数学的な思考力が育たないとよく言う人がいますが、 それはきちんと使ったことのない、グラフ電卓の可能性を理解していない人が 思いこみでいっているようです。グラフ電卓を有効に使えば、数学を築き上げたような 天才たちが何年も掛けて、作り上げてきたことを自分で再発見できるのです。 これは歴史的には ベルギーの神父 Gregory.St.Vincent が 1647 に出版した本の中で 「直角双曲線の横座標が幾何数列的に増加するなら その座標によって裁断された表面の面積は算術数列的に増加する。」 と述べたものを再発見したことになります。

5. なぜか 数学的探求

発見だけでなく、その理由をこれまで、学習したことを活用し、考えていくことが数学の学習活動では大切です。ここでは対数の性質と定積分の性質を復習しながら上で発見した事実を、より簡単な形に変形してから考えてみましょう。

それでは、なぜ 1/x の積分が対数関数で表されるのでしょう? 第一部でで、強調した対数の性質は、掛け算が足し算になるというものでした。 ということは、1/x の積分がその性質を持っていると言うことなのでしょうか? これを、積分の形で表すと

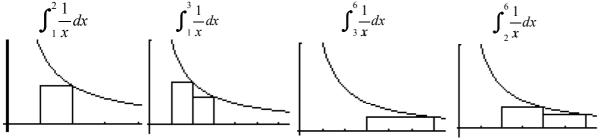
$$\int_{1}^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_{1}^{a} \frac{1}{x} dx + \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx \quad で、 積分の基本的性質から
$$\int_{1}^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_{1}^{a} \frac{1}{x} dx + \int_{a}^{ab} \frac{1}{x} dx \quad は成り立$$$$

ちますから、 $\int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \int_{a}^{ab} \frac{1}{x} dx$ が成り立つということです。

秘密は反比例の性質

ここで y=1/x のグラフについて、思い出してみましょう。これは、小学校で正比例とともに習った反比例のグラフです。(今では中学校で出てくるようです)正比例は、中学校では直線となり、関数とグラフの主役だったのが、反比例は、小学校以来数IIIまで、全然お目にかかりませんでした。しかし、2つの量の間の関係のもっとも基本的なものに変わりありません。これと定積分、すなわちy=1/xと1とx軸との間の面積を結びつけるとき、反比例の性質「横軸の長さがa倍になると対応する高さが1/a」になるという事が鍵のようです。

次のグラフで $1\sim 2$ 、 $2\sim 4$ 、 $1\sim 3$ 、 $3\sim 9$ のそれぞれの積分区間に分割した y=1/x と x 軸との間の面積を下から、長方形で近似したものをよく見比べてみましょう。



グラフを見比べて、なぜ1/xの定積分が、対数の性質を持つのか見当がついたでしょうか。

きちんと数学的には、区分求積の考え方を使う事になります。長方形での近似を上と下から行い、 Σの式で表し、極限を取れば、等しいことが示せます。

最近の教科書では、区分求積は理解しにくいと言うことで、積分はもっぱら微分の 逆演算で導入しています。しかし、こういう必然性のあるところで導入すれば、その意義大切 さも理解できるのではないでしょうか。

また、置換積分を学習した後で見直せば、単なる置換積分の練習問題です。

6. 自然対数の底 e の導入

1/x の定積分が、対数の性質を持つということは、もちろん、一般の反比例 y =1/ax の 定積分も対数の性質を持つということです。したがって、反比例の中でも最も基本的な 1/x の積分は、対数で表せるにしても、よけいな定数がつかず、

「 $\log a \times 2$ いうシンプルな形に表されるべきではないでしょうか?」 常用対数の底 10 というのは、我々が 1 0 進数を用いているからで、人工的な数です。対数関数 については 1/x の積分が、 $\log a \times 2$ を表せる数 a の方がずっと本質的で、自然な数と考えられます。 そこで、この a の値をどう決めるべきか計算してみましょう。

表の L2= $\log a x$, とおくと、①より L2/L3 の値は、約 2.302 で、L3= $\log \log x$ ですからしたがって $\log a x = 2.302 \log \log x$ 左辺に底の変換公式を使うと

 $\frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} \doteq 2.302 \log_{10} x$ よって $\log_{10} a \doteq \frac{1}{2.302}$ これから $a \doteq 1 \ 0^{1/2.302}$

この値をグラフ電卓で求めると a = 2.71897 となります。小数点以下第六位までの正確な値2.302585 を用いればa = 2.7182819 です。

定積分計算の精度を上げたときの a の極限の値(高校では存在するとして)こそが 1/x の積分が、log a x と対数で表されるときの底の値ということになります。この値を自然対数の底といい、e で表すわけです。積分の逆演算は微分ですから、このように決めた e を底とする

対数関数 $\log e \times e$ 微分すると 1/x になるはずです。すなわち $\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}$ です。

このeが教科書の定義の式と、同じであることは、微分の定義の式からわかります。

参考文献 「数の大航海」志賀浩二 日本評論社