数学Ⅲでの対数　eの導入

岡山市立岡山後楽館高校　　河合　伸昭

一部　対数　数学Ⅱの復習　「作ってみようあなただけの対数表」
対数の原理の理解と記号に慣れる

1.A.　グラフ電卓で検算しながら、次の表を完成させよう。

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8

2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}

B.　暗算で次の値を計算しよう。　(ヒント　Aの表を活用しよう)

①　16×32　　②　32×64　　③　256×16

④　128×64　　⑤　$65536 \div 1024$　　⑥　$32768 \div 2048$

⑦　16^3　　⑧　$\sqrt{256}$　　⑨　$\sqrt[3]{512}$

C.　マイナス×マイナスはなぜプラスか　考えてみよう

D.　自然数の指数の計算の原則に従って、指数法則を拡張してみよう

①　0の場合　　②　負の場合　　③　分数の場合

2.　対数の記号の導入

A.　次の式を，対数の形で（log　の記号を用いて）表せ。

①　$2^5=32$　　②　$5^3=125$　　③　$2^{-2}=0.25$　　③　$10^2=100$

B.　2.　次の式を，指数の形で（a^r　の形で）表せ。

①　$\log_2 32=5$　　②　$\log_5 125=3$　　③　$\log_2 0.25=-2$　　④　$\log_{10} 100=2$

C.　次の値を求めよ。

①　$\log_2 8$　　②　$\log_5 25$　　③　$\log_2 0.5$　　④　$\log_{10} 1000$

D　次の式のxの値を求めよ。

①　$\log_2 x=4$　　②　$\log_5 x=3$

E　　次の式の値を求めよ

①　$2^{\log_2 8}$　　②　$5^{\log_5 10}$　　③　$10^{\log_{10} 2}$

F　　2を10を底とした指数で表せ

３．対数の公式を作っていこう

A　対数の原理を対数記号を使って、公式の形に整理してみよう

対数の公式を導いてみよう。

① $\log_a xy =$　　　　② $\log_a \dfrac{x}{y} =$

③ $\log_a x^n =$　　　　④ $\log_a xy =$

⑤ $\log_a \dfrac{x}{y} =$　　　　⑥ $\log_a x^n =$

B　底の変換公式を導いてみよう。

$\log_a b = x$　として　底を c に変換

C．次の対数の値をグラフ電卓で求めてみよう

$\log_2 3$　　　　$\log_5 7$

$\log_5 7$

D．対数の値をｸﾞﾗﾌ電卓の対数キーを使わず、求めてみよう

１の表から　$2^{10} = 1024 \fallingdotseq 1000$

これから　$\log_{10} 2$　の値を見積もる方法を考えよう　　ヒント ２ -F

E．対数の性質を利用して、今まで求めた対数の値から、次の対数の値を求めてみよう

$\log_{10} 4$　　　　$\log_{10} 6$　　　　$\log_{10} 9$

$\log_{10} 20$　　　　$\log_{10} 2.1$　　　　$\log_{10} 5$

４ なぜ、教科書の値と、ほとんど同じ値が求められたのか考えてみよう。

第二部　数学Ⅲでの対数　eの導入その１

「ｅの導入　１／ｘ　の積分を探る　」　～そして対数は、元々自然対数だった～

１．　不定積分からの疑問　なぜ　１／ｘ　の積分だけ違うのか

数学Ⅱでｎが０以上の整数の時ｘ^n の積分は $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ と表せることを学びました。

数学Ⅲでは、負の数・分数の場合のｎ（≠-1）についても、ｘ^{n}の積分が予想通り

$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ と表せました。ところが１／ｘの積分だけは、特別のようです。

これがどうなるか、グラフ電卓の定積分機能で調べていき増しよう。

２．　定積分の実行

まず $\int \frac{1}{t}dt$ の積分をグラフ電卓で実行しましょう。

	操作	内容
1	Y=	で積分する関数　１／ｘ　を入力
2	GRAPH	で関数　の描画
3	2nd + CALC ＋７	で　Integral　を選択

画面下部に lowerLimit ？ と表示されるので 定積分の下端の値　１を入力

画面下部に UpperLimit ？と表示されるので 上端の値 1.5 を入力(ここから 0.5 刻みで 10 まで)

4	Enter	で定積分実行

	STAT　機能の活用	内容のクリア
1	STAT	統計機能の選択キー
2	ClearList	で　List 内容のクリアを選択(4 を押しても良い)
3	2nd + 1	で　L1(1 列目)を指定
4	Enter	で　L1 の内容の消去の実行 L2,L3 も同様に消去

データの打ち込み

1	STAT	統計機能の選択キー
2	Edit	で　編集を選択　（１を押しても良い） L1 にｘの値、L2 に定積分の値を打ち込みます。

STAT　PLOT 機能の活用

次に、この値をグラフ電卓のプロット機能でプロットしてみます。

1	2nd + Y=	STAT　PLOT 機能の選択キー
2	1:Plot 1 または Enter	で 1:Plot 1　を選択　（１を押しても良い）

この画面で ON を選択(選択はカーソルが ON の上で点滅しているときに ENTER を押す)

以下　Type は上段左から二番目、XList は L1, YList は L2 Mark は左端を選択

そして　画面右端の Graph を押すと　データをプロットしたグラフが表示される。

3　グラフの解釈

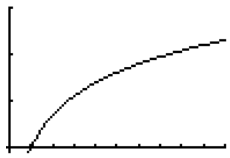
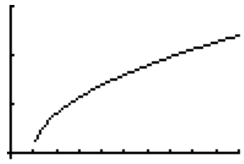
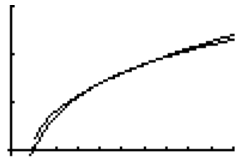
このグラフを見て、生徒に意見を聞いてみます。

生徒の意見　①

②

このプロットしたグラフは、一見無理関数 に似ているように見えます。
生徒に聞いても、無理関数を習ったばかりなので、 という答えが多く返ってきました。
実際、係数を 4/5 とすれば、ほぼ一致しているように見えます。

1/x　の数値積分のプロット　　$y=\frac{4}{5}\sqrt{x-1}$　　同一画面に重ねたもの

二年の対数の授業では、太陽系の惑星の公転周期と軌道半径の間の関係すなわち「**ケプラーの第三法則**」をグラフ電卓で確認する「**君もケプラー**」という教材をやっています。「君もケプラー」では、２つの量の間にべき乗の関係があるときは、対数を取るとグラフが直線（ 線形関係）になることを学びました。
ここでも、それを応用してみましょう。

操作　List　の対数を一度に取る　　1

1	log（	対数キー　左側下から４番目
2	2nd + 1 ）	で L1（1 列目）を指定
	STO →	データのｽﾄｱ（格納）命令　画面に矢印が表示されます。L2,L3 も消去
3	2nd + 2	でｽﾄｱ（格納）先 L3（3 列目）を指定
4	Enter	で実行　画面に｛　｝で L3 の内容の一部が表示 同様に　L2 の対数も L4 にストア

積分範囲の上端　L1 x	積分の値 L2 y	x の対数を取った値 L3 logx	y の対数を取った値 L4 logy
1.5	0.405465	0.17609	-0.39205
2.0	0.693147	0.30103	-0.15917
2.5	0.916291	0.39794	-0.03797
3.0	1.098612	0.47712	0.040844
3.5	1.252763	0.54407	0.097869
4.0	1.386294	0.60206	0.141855
4.5	1.450408	0.65321	0.16149
5.0	1.609438	0.69097	0.206674
5.5	1.704748	0.74036	0.23166
6.0	1.791760	0.77015	0.25328
6.5	1.871802	0.81291	0.27226
7.0	1.94591	0.8451	0.289123
7.5	2.014903	0.87506	0.304254
8.0	2.079442	0.90309	0.317947
8.5	2.140066	0.92942	0.330427
9.0	2.197225	0.95424	0.341874
9.5	2.251292	0.97772	0.352432
10.0	2.302585	1.00000	0.362216

４ データの間の関係をグラフ電卓を活用して探る

① まず L1,L2 の間に比例関係があるか
まず視察によって、次に STAT PLOT 機能で

② 他の可能性も探ってみる。
まず視察によって、次に STAT PLOT 機能で

いろいろプロットしてみると二列目と三列目 すなわち L2(定積分の値)と L3(ｘの対数) が比例していることがわかります。 １／ｘ の積分は、対数関数で表されるようです。

操作 線形性の確認 LinReg(ax+b) 線形回帰機能 1

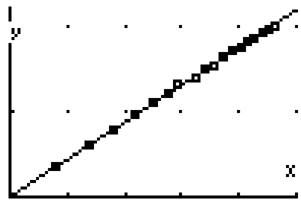
1 [STAT] カーソルを一つ右へ移動 CALC へ

1 1 1

2 [4.LinReg(ax+b)] LinReg(ax+b) 線形回帰機能を選択

3 [ENTER] で実行（または すぐ ４を押し、ENTER）

画面に LinReg(ax+b) と表示されるので



4 [2nd] + [2] + [,] で L2(2 列目)を指定

5 [2nd] + [2] で L3(3 列目)を指定

6 [ENTER] で実行（または すぐ ４を押し、ENTER）

画面に LinReg(ax+b) a と b の値が表示される。

y= 2.302585$\log_{10}$ x

＊ グラフ電卓を使うというと、数学的な思考力が育たないとよく言う人がいますが、それはきちんと使ったことのない、グラフ電卓の可能性を理解していない人が思いこみでいっているようです。グラフ電卓を有効に使えば、数学を築き上げたような天才たちが何年も掛けて、作り上げてきたことを自分で再発見できるのです。
これは歴史的には ベルギーの神父 Gregory.St.Vincent が 1647 に出版した本の中で
「直角双曲線の横座標が幾何数列的に増加するなら
その座標によって裁断された表面の面積は算術数列的に増加する。」
と述べたものを再発見したことになります。

５．なぜか 数学的探求

発見だけでなく、その理由をこれまで、学習したことを活用し、考えていくことが数学の学習活動では大切です。ここでは対数の性質と定積分の性質を復習しながら上で発見した事実を、より簡単な形に変形してから考えてみましょう。
それでは、なぜ １／ｘ の積分が対数関数で表されるのでしょう？
第一部でで、強調した対数の性質は、掛け算が足し算になるというものでした。
ということは、１／ｘの積分がその性質を持っていると言うことなのでしょうか？
これを、積分の形で表すと

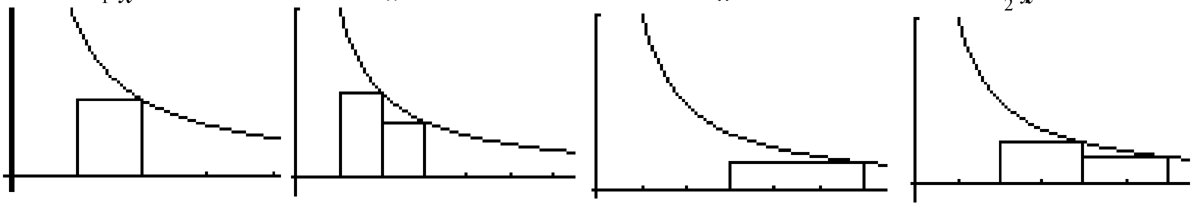
$\int_1^{ab}\frac{1}{x}dx=\int_1^{a}\frac{1}{x}dx+\int_1^{b}\frac{1}{x}dx$ で、 積分の基本的性質から $\int_1^{ab}\frac{1}{x}dx=\int_1^{a}\frac{1}{x}dx+\int_a^{ab}\frac{1}{x}dx$ は成り立ちますから、 $\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\int_a^{ab}\frac{1}{x}dx$ が成り立つということです。

秘密は反比例の性質

ここで　y=1/x　のグラフについて、思い出してみましょう。これは、小学校で正比例とともに習った反比例のグラフです。（今では中学校で出てくるようです）正比例は、中学校では直線となり、関数とグラフの主役だったのが、反比例は、小学校以来数Ⅲまで、全然お目にかかりませんでした。しかし、２つの量の間の関係のもっとも基本的なものに変わりありません。これと定積分、すなわちｙ＝１／ｘと１とｘ軸との間の面積を結びつけるとき、反比例の性質「横軸の長さが a 倍になると対応する高さが 1/a」になるという事が鍵のようです。

次のグラフで　1~2 、2~4 、1~3 、3~9　のそれぞれの積分区間に分割したｙ＝１／ｘとｘ軸との間の面積を下から、長方形で近似したものをよく見比べてみましょう。

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$　$\int_1^3 \frac{1}{x}dx$　$\int_3^6 \frac{1}{x}dx$　$\int_2^6 \frac{1}{x}dx$



グラフを見比べて、なぜ１／ｘの定積分が、対数の性質を持つのか見当がついたでしょうか。

きちんと数学的には、区分求積の考え方を使う事になります。長方形での近似を上と下から行い、Σの式で表し、極限を取れば、等しいことが示せます。

最近の教科書では、区分求積は理解しにくいと言うことで、積分はもっぱら微分の逆演算で導入しています。しかし、こういう必然性のあるところで導入すれば、その意義大切さも理解できるのではないでしょうか。

また、置換積分を学習した後で見直せば、単なる置換積分の練習問題です。

６.　自然対数の底ｅの導入

1/x の定積分が、対数の性質を持つということは、もちろん、一般の反比例　y =1/ax　の定積分も対数の性質を持つということです。したがって、反比例の中でも最も基本的な　1/x の積分は、対数で表せるにしても、よけいな定数がつかず、

「$\log_a x$ というシンプルな形に表されるべきではないでしょうか？」

常用対数の底 10 というのは、我々が１０進数を用いているからで、人工的な数です。対数関数については 1/x の積分が、$\log_a x$　と表せる数 a の方がずっと本質的で、自然な数と考えられます。　そこで、この a の値をどう決めるべきか計算してみましょう。

表の　$L2=\log_a x$，とおくと,①より　L2/L3　の値は、約 2.302 で、$L3=\log_{10} x$ ですから

したがって　$\log_a x \fallingdotseq 2.302 \log_{10} x$　左辺に底の変換公式を使うと

$\frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} \fallingdotseq 2.302 \log_{10} x$　よって　$\log_{10} a \fallingdotseq \frac{1}{2.302}$　これから　$a \fallingdotseq 10^{1/2.302}$

この値をグラフ電卓で求めると　$a \fallingdotseq 2.71897$　となります。小数点以下第六位までの正確な値2.302585 を用いれば $a \fallingdotseq 2.7182819$　です。

定積分計算の精度を上げたときの a の極限の値(高校では存在するとして)こそが 1/x の積分が、$\log_a x$ と対数で表されるときの底の値ということになります。この値を自然対数の底といい、ｅで表すわけです。積分の逆演算は微分ですから、このように決めたｅを底とする対数関数 $\log_e x$ を微分すると 1/x になるはずです。すなわち $\frac{d(\log_e x)}{dx}=\frac{1}{x}$　です。

このｅが教科書の定義の式と、同じであることは、微分の定義の式からわかります。

参考文献　「数の大航海」志賀浩二　日本評論社