Cabri 3D を使って立体感覚を養成

-大学入試立体問題の攻略に最適-

小森恒雄 Naoco Inc.

四面体は平面図形の三角形に対応する立体図形です。三角形の5心(内心,外心,重心,垂心, 傍心)に対応する四面体の5心の作図は紙の上には厄介なものですが,Cabri 3Dを使えば簡単に 作図できます。動かすことができるので図形の性質をより深く探求することができます。ここで はその作図の一端を紹介します(一般に四面体の垂心は存在しません)。Cabri 3Dで立体感覚を養 えば,大学入試の立体問題の攻略にも役立ちます。

1.外心

●四面体の外心は4つの頂点から等距離にある点です。この 作図は2つの点から等距離にある点の集合を求める,「垂直 2等分面」ツールを使います。

> Note:「垂直2等分面」ツールは、ツールバーの左から5 番目のツールボックスにあります。2点を指定(クリック) することにより、2点を結ぶ線分を垂直に2等分した平面 を作図します。

まずは四面体を作図します。右から3番目のツールボック スにある「四面体」ツールを使います。

> Note: ベース平面上に3項点を指定し,第4の頂点はベ ース平面外へShiftキーを押しながらカーソルを移動して 作図します。四面体の面は透明にし,見やすくします。こ れは右クリックにより出すメニューから「面のスタイル」 を選択し,塗りつぶしなしにします。

「垂直2等分面」ツールを選択し、2点B,Cを指定する と、辺BCの垂直2等分面が作図されます。

> Note: ラベル A, B,…は左端のツールボックスにある「操 作」ツールにより頂点を選択した後, 英字をキーボードか ら入力します。

同様に2点B, D, 2点A, Bを指定すれば, 3つの垂直2 等分面が作図されます。

3つの垂直2等分面の交点Oを求めます。左から2番目に あるツールボックスの「交点」ツールを選択し、3つの垂 直2等分面を指定すれば、交点(=外心)が出現します。







作図の足場となった3つの垂直2等分面を非表示にすると、 右図のようになります。

> Note: 非表示にするには, 垂直2等分面を選択し, 右ク リックにより出るメニューより「表示/非表示」を選択し ます。

外接球を作図します。

Note: 左から4番目にあるツールボックスの「球」ツー ルを選択し、中心Oと、半径となる頂点の1つを選択し ます。

●三角形の外心は鋭角三角形,直角三角形,鈍角三角形によってその位置は三角形の内部,斜辺の中点,外部でした。 四面体のときはどうでしょうか。底面の△BCDを固定し, 頂点Aをドラッグして調べます。





外心〇が四面体の内部にあるとき 外心〇が四面体の面上にあるとき



C

с

(ABCDは鋭角三角形)

Note:外心が四面体の面上にあるときがポイントです。△BCDは鋭角三角形で,頂点Aは半球の球面上にあります。この半球の球面より内側に頂点Aがあると,外心Oは四面体の外に出ます。この半球の球面より外側に頂点Aがあると,外心Oは四面体の内側にあります。ただし,頂点Aが移動して外心Oが面 BCD 以外の面に届かない限りのことです。

2.重心

●重心は重さの中心ですから、四面体を2等分する平面を3 つ作図して、その交点を求めます。

まず各辺の中点を作図しておきます。

Note: 左から5番目にあるツールボックスの「中点」ツ ールを選択し,辺にカーソルを移動して「この辺の中点」 とツールチップが表示されたところでクリックします。

辺 AD と対辺 BC の中点を通る平面を作図します。これは 「平面」ツールを使って,辺と点を指定します。



同様にして辺 AB と対辺の中点を通る平面,辺 CD と対辺 の中点を通る平面を作図します。

3つの平面の交点Gを求めます。「交点」ツールを選択し、 3つの平面を指定すれば、交点(=重心)が現れます。

頂点Aと重心Gを結ぶ直線は底面の \triangle BCDの重心Eを通り、GはAEを3:1に内分します。

Note: 4 つの頂点の位置ベクトルを $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ とすれば重心 $G(\vec{g})$ は $\vec{g} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})/4$ です。

●この作図をよく見ると、相対する辺の中点どうしを結んだ 線分は重心Gで交わります。しかも各線分の中点です。

> Note: $g = \{(a+b)/2 + (c+d)/2\}/2$ なので、自明なことかも しれません。重心を作図するときは1組の相対する辺の中 点を求め、さらにそれらの中点を求める方法が簡単です。

四面体の中点どうしを結ぶと八面体ができます。これを**内** 包八面体といいます。

> Note: 内包八面体は対面が平行で,互いに合同な三角形 になっています。これは中点連結定理より分かります。

3.内心

●内心は4つの面から等距離にある点です。この作図は2つの面のなす角を2等分する面を作図する、「2等分面」ツールを使います。

Note: 2 つの面の交線を軸として, 適当な半径の円を描き, 円と 2 面の交点 P, Q とします。 左から 5 番目のツールボ ックスにある「2 等分面」ツールを選択し, 点 P→軸上の 点 R→点 Q の順に指定すれば, \angle PQR を 2 等分する平面 が作図されます。

底面の△BCDで、各辺を軸とする円をそれぞれ作図します。



四面体の面を復活し、円と底面、円と側面の交点をそれぞ Note: 交点を求めるときは,四面体の面を表示しておく 必要があります。右クリックにより出るメニューから「面

「2等分面」ツールを使って、2つの面のなす角を2等分す る平面を3つ作図します。

のスタイル」を塗りつぶしにします。

Note:2番目に指定する軸上の点は、適当な点でかまいま せん。

3つの平面の交点 Iを求めます。「交点」ツールを選択し、 3つの平面を指定すれば、交点(=内心)が現れます。

実際に内接球を作図します。

れ求めます。

Note: 底面 BCD に垂直で, 点 I を通る直線を, 左から5 番目にあるツールボックスの「垂直」ツールで作図します。 点Iを中心とし,底面と垂線との交点を半径とする球を作 図します。

4.傍心

●傍心は四面体の外側に位置し,接している面以外の3つの 四面体の面を延長した部分に接する球の中心です。

作図は外角の2等分面を作図してその交点を求めます。面 倒ですが、内心と同様の作図になります。ここでは、4つ の傍接球を作図した完成図のみ示します。









5.垂心

●四面体の垂心は4つの頂点から対面に下ろした垂線の交点 ですが、垂心は必ずしも存在しません。すなわち、垂線は 1点で交わりません。これは、三角形の垂心が必ず存在す ることと異なり、2次元と3次元の大きな違いです。

どんなとき垂心が存在するのか。このことを頂点Aを動かして調べます。

適当な四面体を作図し、各頂点から対面へ4本の垂線を引 きます。通常、1点で交わりません。底面の△BCDに3本 の垂線を引いておき、頂点Aをドラッグして動かします。 垂線の足の位置に注意します。



頂点Aを通る垂線の足が△BCDの1本の垂線 上にあっても四面体の垂心は出現しません。





垂線の足が△BCD の垂心に一致すると,四 面体の垂心も出現します。

右図は垂心が出現したときの真上から見た図(平面図)です。

Note:相対する辺はねじれの位置にありますが,3組とも 直交すれば四面体の垂心が存在すると予測されます。

一般に、四面体の垂心は相対する3組の辺が直交するとき 存在します。相対する3組の辺が直交する四面体を直辺四 面体(あるいは直交四面体)といいます。

> **Note**:相対する2組の辺が直交すればもう1組の辺も直 交します。

●一般の四面体と正四面体の間には,直辺四面体のほか,等 積四面体という特別な四面体がもう1つ知られています。 等積四面体とは4面の面積が等しい四面体です。これは結 局,4面が互いに合同な鋭角三角形になります(Banの定理)。



6.大学入試の立体問題

●等積四面体を扱った問題が2010年東大理系6番に出題されました。4面が互いに合同な鋭角三角形が作る四面体の問題です。問題では四面体を作ることが当たり前のように扱われていますが、そこで疑問を持つと次の問題には進めません。

右図は1つの大きな鋭角三角形を作図し、その中点を結ん で4つの合同な鋭角三角形をつくり、それらを折りたたん だものです。3つの頂点D,E,Fの軌跡は円を描き、1点 で交わります。確かに四面体ができます。

真上からみると、第4の頂点は大きな鋭角三角形 DEFの 垂心の上にあることが分かります。

> **Note**:何でもないことですが,四面体ができることが実 感できます。

●2008 年東大理系 3 番では、正八面体を机の上に置いて真上 から見た図(平面図)を描けという問題が出されました。ま た、それを平行な 2 つの面の重心 G1、G2 を通る軸で回転 させたときの立体の体積を求めよ、1 つの辺の長さは1 と する、というのが 2 番の問題でした。

正八面体を横から見た図はよく知っていても,机の上に置いた図を描け,には受験生も戸惑ったことでしょう。難問だったようです。しかし,正四面体の各辺の中点を結んだ立体が正八面体であること(内包八面体です)を知っていれば,そんなに難しくはありません。東大受験生なら一度は解いたことのある,z軸の周りに線分を回転させたときにできる立体の体積問題です。

Note:体積を求めるとき必要な正八面体の頂点の座標は, 正四面体の辺の中点であることから簡単に決められます。

7. 最後に

Cabri 3D を利用すれば立体図形の作図を容易にしてくれ ます。いったん描いてしまえば、修正したり、視点を変え たりできます。これは紙の上に描くのと大きな違いです。 四面体にはここで紹介した5心の作図のほか興味ある話題 が豊富にあります。Cabri 3D を利用すれば簡単に作図でき、 しかも正確ですから、学習やより深い探求活動にお勧めの ツールです。

参考文献

一松 信,現代に活かす初等幾何入門,岩波書店,2003





この図を知っていれば大学入試 で役立つことがあるでしょう。