

国際バカロレア数学の問題をグラフ電卓を使って解いてみよう 2

～生徒全員がグラフ電卓を持つ学校の実践報告～

馬場博史

関西学院千里国際中等部・高等部

<2009年T³Japan第13回年会発表では指数関数の問題例を紹介しましたが、今回は対数関数です。国際バカロレア=IBについての説明は前回発表の内容と一部重複しています。>

1. はじめに

本校では、1999年度より生徒全員にグラフ電卓を持たせ、それを有効利用する授業を追求している。同一敷地校舎内に併設の関西学院大阪インターナショナルスクールは、国際バカロレアInternational Baccalaureate=IBの認定校であるため、その情報が入りやすい環境にある。IB数学はグラフ電卓を利用する問題が多く、実用的・学際的な問題も豊富なので本校の授業でも時々取り入れている。

2. 国際バカロレア=IBとは

国際バカロレア=IBは、1968年にスイスのジュネーブで設立されたスイス民法典に基づく財団法人、国際バカロレア(旧国際バカロレア機構)を指す場合と、その定める教育課程そのものを意味する場合とがある。その教育課程は、初等教育課程Primary Years Programme=PYP(3才から12才対象)、前期中等教育課程Middle Years Programme=MYP(11才から16才対象)、および後期中等教育課程Diploma Programme=DP(16才から19才対象)の3つから成る。これらのうち少なくともひとつを実施している学校は、2011年7月現在、141ヶ国、3289校を数えており、その普及率においてまさに世界標準といえるものである。

DPを修了して試験に合格した生徒には、国際バカロレア資格IB Diplomaが授与される。この資格は世界各国において正当な大学入学資格として認められている。日本では1979年に文部科学省より正式に認められ、国公立を問わずほとんどの大学で、入学資格・合否判定資料として採用されている。

3. 後期中等教育課程Diploma Programme=DPの構成

PYP、MYPに続き、高等学校最後の2年間で実施されるDPは、知識の習得だけでなく、大学入学後のことも考慮され、以下の通り構成されている。

【Core Requirements】 中心となる必修科目

・The extended essay 研究論文

下の6教科から1つを選び、自身の研究内容を4000語以下の論文に仕上げる。

・Theory of knowledge(TOK) 知識の理論

学問分野によって異なる発想を持つことを探究する学際的な科目である。例えば、ある問題解決法を歴史家のものと科学者や芸術家のものと比較してみるなどの方法がある。

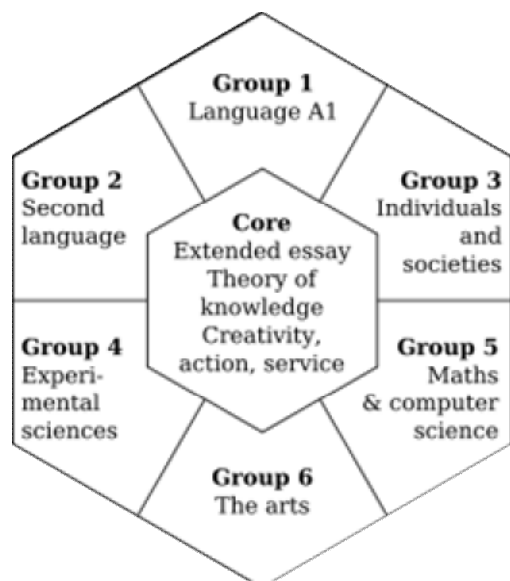
・Creativity, action, service(CAS) 教科外活動

地域での創造活動、奉仕活動、スポーツ活動などで、2年間に少なくとも150時間参加する。

【Subject Group】 教科

Group 1 : Language A1 第一言語

Group 2 : Second language 第二言語



- Group 3 : Individuals and societies 社会
- Group 4 : Experimental sciences 理科
- Group 5 : Mathematics and computer Science 数学と情報
- Group 6 : The arts 芸術(または選択科目)

これら6教科のうち3～4教科からはHigher Level = HL(授業数240時間)の科目を、残りの教科からはStandard Level = SL(同150時間)の科目を選択する。ただし、Group 6では他教科の科目を選択することができる。第一言語・第二言語以外の教科は、英語、フランス語、スペイン語が公式教育言語として定められている。全課程修了後、IBDP Examinationを受験する。6教科がそれぞれ7点満点、研究論文と知識の理論で3点、合計45点満点となっており、24点以上獲得すればIB Diplomaが授与される。また、科目ごとに修了証が与えられる。

4. IB数学の目標

IB数学の目標として次の3つがあげられている。

- ・数学の知識を豊かにし、その概念・原理を理解する
- ・論理的、批判的、創造性のある考え方を育てる
- ・抽象化、一般化する力を身につけ、向上させる

さらに追記して、数学が国際的にも重要であること、文化的・歴史的な多様性を理解することもあげられている。ただ、文章化されていないが、自然現象や社会現象のモデル化も重要な目標として意識されている。実際、日本の教科書と比較して、種々の現象を数式化して分析するという実例が多い。そのような問題を考えることによって、他の学問分野も学習することができ、IB全体に共通する重要な目標のひとつといえる学際的な探究にもつながっている。

5. IB数学の科目

IB数学には次の4つの科目がある。

- ・Mathematical Studies SL 数学的学習・標準レベル(主に将来数学を使わない生徒対象)
- ・Mathematics SL 数学・標準レベル(主に将来文系分野で数学を使う生徒対象)
- ・Mathematics HL 数学・高レベル(主に将来理系分野で数学を使う生徒対象)
- ・Further mathematics SL 発展数学・標準レベル(主に将来数学を専攻または深く学習する生徒対象)

なお、Mathematics and Computer Scienceからは、少なくともひとつの数学の科目を履修しなければならない。Computer Scienceに2科目あるが、これは数学を1科目履修した上での選択科目となっている。

6. IB数学の学習内容

上の4科目のうち、Mathematical Studies SLは、実生活に活用できる数学に重点を置いた内容となっており、日本で2011年度まで数学 I と並んで必修となっていた数学基礎にほぼ近いといえる。Mathematics SL/HLの学習内容は以下のようになっている。

【Core Topics】(HL 190時間 SL 140時間)

Number and Algebra 数と代数、Functions and Equations 関数と方程式、Circular Functions and Trigonometry 三角関数、Vector Geometry ベクトル、Matrices and Transformations 行列と変換、Statistics 統計、Probability 確率、Calculus 微分積分

【Optional Topics】(HLのみ以下から1つを選択40時間)

Further Statistics 発展統計、Sets, Relations, and Groups 集合、写像、群、Discrete Mathematics 離散数学、Differential Equations and Series 微分方程式と級数

【Portfolio】(HL・SL共に10時間)

以上のTopicsの中から異なる2つを基に、学習した過程を次の2つの方法で表現する。

- ・ Mathematical Investigation 数学の研究
- ・ Mathematical Modeling 数学のモデル化

7. IB数学の評価法

外部評価(筆記試験)が80%、内部評価(ポートフォリオ)が20%を占める。SLの筆記試験はPaper 1とPaper 2があり、HLはさらにPaper 3がある。2008年からPaper 1はグラフ電卓不可のSection A(基本問題)とSection B(応用問題)、Paper 2はグラフ電卓が必要なSection A(基本問題)とSection B(応用問題)、Paper 3はグラフ電卓が必要な応用問題となった。グラフ電卓のプログラムは削除しておかなければいけない。また、代数計算機能Computer Algebra System=CASのついたものや、パソコンと同じキー配列QWERTY Keyboardsを持ったものも許されない。ちなみに、米国の大学で教養課程の単位として認められるAP(Advanced Placement Test)や、入学資格試験に使われるSAT(Scholastic Aptitude Test)においても、グラフ電卓の必要な問題が出題されている。

2008年から	Higher Level		Standard Level	
外部評価 筆記試験	5時間	80%	3時間	80%
筆記試験1 必修範囲	2時間	30%	1時間30分	40%
	Section A 基本問題 Section B 応用問題 グラフ電卓不可			
筆記試験2 必修範囲	2時間	30%	1時間30分	40%
	Section A 基本問題 Section B 応用問題 グラフ電卓必要			
筆記試験3 選択範囲	1時間	20%		
	応用問題 グラフ電卓必要			
内部評価 ポートフォリオ	20%			

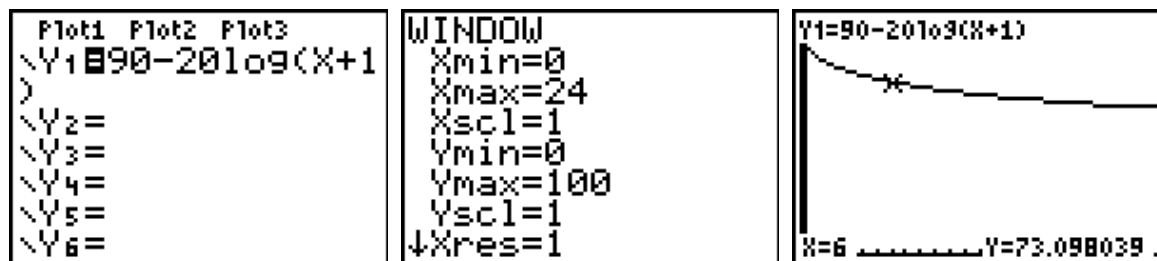
8. 対数関数のモデル化問題例 (IB数学の教科書より抜粋、和訳したもの)

▼(例1)地震の大きさを測定する方法は、“Richter Scale”として知られている。地震の強さがIのとき、マグニチュードRは、 $R = \log_{10}(I/I_0)$ で表される¹。ただし、地震の最小の強さを I_0 とする。

▼(例2)5才から13才のこどもの身長と体重の関係は、“Ehrenberg Relation”として知られている。この年代の標準体重W(単位kg)と身長h(単位m)との関係は、 $\log_{10}W = \log_{10}2.4 + 0.8h$ で表される。

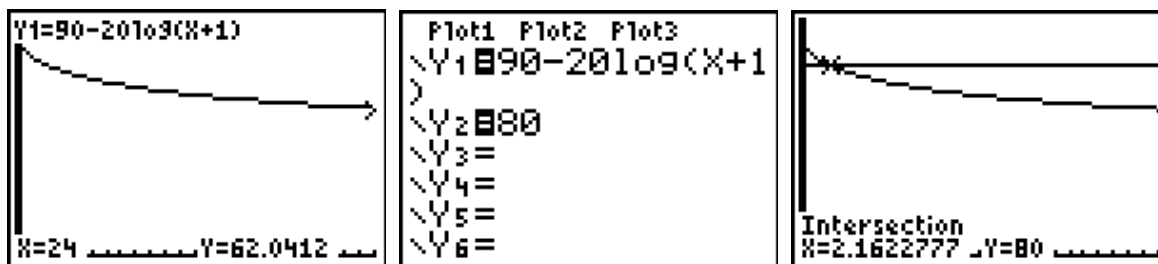
▼(例3)星の明るさは等級で表される²。肉眼で見える最も暗い星(等級6)の光束を L_0 、ある星の光束をLとして、その等級mは、 $m = 6 - 2.5\log_{10}(L/L_0)$ で表される。

▼(例題1)7年生の生徒がある範囲の学習を終えて試験を実施し、その後2年間の間に何回か再試験をした。tヶ月後の平均点Sは、次の式でモデル化されることがわかった。 $S = 90 - 20\log_{10}(t + 1)$ 。最初の平均点はいくらか。6ヵ月後、2年後の平均点はいくらか。平均点が80点になるのはいつか。



¹ マグニチュード(magnitude)とは、地震が発するエネルギーの大きさを表した指標値。1935年、アメリカの地震学者チャールズ・リヒターによって初めて定義された。

² 天体の等級も英語でマグニチュードといい、天体の明るさを表す尺度である。等級の値が小さいほど明るい天体であることを示す。また、0等級よりも明るい天体の明るさを表すには負の数を用いる。肉眼で見える最も暗い恒星の等級は6で、例えば火星は-3等級である。



▼(問題1) 音量 d (単位デシベル)は、音の強さのレベルによって表されるが、人間の耳によって経験的に定められている。ある音の強さを I 、人間の感じる最小の音の強さを I_0 とすると、 $d = 10 \log_{10}(I/I_0)$ となる。 I が I_0 の10倍のとき、何デシベルか。1000倍、10000倍のときはいくらか。

▼(問題2) 5才から13才のこどもの標準体重 W (単位kg)と身長 h (単位m)との関係は、 $\log_{10}W = \log_{10}2.4 + 0.8h$ で表される。10才で身長1.4mの場合、標準体重はいくらか。8才で体重50kgの場合、身長はいくらか。 W を h の関数として表せ。 h に対する W のグラフを書け。逆に W に対する h のグラフを書け。

▼(問題3) 星の等級 m は、肉眼で見える最も暗い星(等級6)の光束を L_0 、ある星の光束を L として、 $m = 6 - 2.5 \log_{10}(L/L_0)$ で表される。 $L = 100.5L_0$ のとき、等級 m を求めよ。 L を m と L_0 で表せ。 m の関数として L のグラフを書け。逆に、 L の関数として m のグラフを書け。

▼(問題4) ある製品はそのコンピューターチップ(集積回路)の故障時間failure timeを考えることが重要である。ある会社では、全体のうち x (割合)が故障するまでの時間(単位は年)を、 $t = -1/c \log_{10}(1-x)$ で表している(ただし、 c は正の定数)。定義域を述べよ。 $c = 0.1$ 、 $c = 0.2$ 、 $c = 0.3$ のとき、40%が故障するまでの時間を求めよ。定数 c はチップの信頼度とどんな関係があるか。 x を t の式で表せ。 $c = 0.1$ のとき、 t に対する x のグラフを書け。逆に、 x に対する t のグラフを書け。

▼(問題5) 国の経済状態をモデル化するのにも対数が役立つ。資本主義国におけるパレートの法則”Pareto’s Law”は³、ある年収 I とその額を超える年収を稼ぐ人数 n との関係を表しており、次の式でモデル化される。 $\log_{10}I = \log_{10}a - k \log_{10}n$ (a と k は正の定数)。 I を n の式で表せ。 a と k をいろいろ変えることにより、 I と n の関係を述べよ。

▼(問題6) 環境の観測を長く続けたところ、オゾン層の厚さは、長年に渡って排出されてきたものに影響を受けていることが明らかになった。オゾン層の厚さは、関係式 $\log_{10} \lambda_0 - \log_{10} \lambda = kx$ で求めることができる。ただし、 λ_0 は太陽からオゾン層に達するまでの光の強さ、 λ はオゾン層を通過した後の光の強さ、 k は波長に対する厚さ x cmのオゾンの吸収定数である。大気圏の中のある地域で得られたデータでは、 $\lambda_0 = 3200 \times 10^{-8}$ 、 $k \doteq 0.40$ 、 $\lambda_0 / \lambda = 1.10$ となった。オゾン層の厚さを求めよ(小数第2位まで)。 λ を k 、 λ_0 、 x で表せ。オゾン層の厚さが0.20cmのとき、光の量は何%減少するか。 λ_0 が固定されているとき、 k と λ の関係はどういえるか。

<参考書籍>

Mathematics HL Core 3rd Edition (IBID Press)
Mathematics Standard Level 3rd Edition (IBID Press)

<参考サイト>

IB <http://www.ibo.org/>
IBID Press <http://www.ibid.com.au>
Wikipedia IB Group 5 subjects http://en.wikipedia.org/wiki/IB_Group_5_subjects

³ イタリアの経済学者パレートが発見した所得分布の経験則で、別名2:8の法則とも言われる。全体の2割程度の高額所得者が社会全体の所得の約8割を占めるといふ法則。他のさまざまな現象にも適用できる。