

「ボールバウンス」の種々の実践

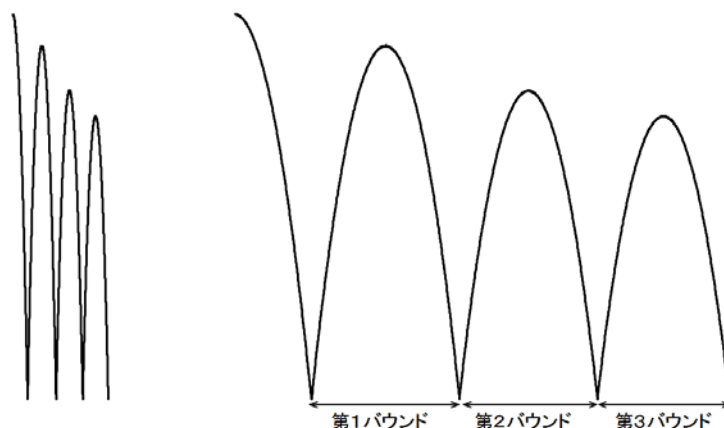
片岡 啓
和歌山大学

これまでも、弾むボールの運動の解析は、実際の運動を数学的に表現するよい教材として、しばしば取り上げられてきた。距離の測定器を用いて落下運動の方程式や運動した総延長を求める、またバウンドごとの最高点の性質を調べるなどの授業であった。ここでは、最近の Mathematics Teacher 誌 (NCTM) に掲載されたやや新しいアングルからの実践を紹介し、実際に実験を試みる。「弾むボールの数理の探究」¹という実践では、測定の面倒な高さの代わりにバウンドごとの時間を測ることで、等比数列や無限等比級数の学習と結び付けている。

1 反発係数

1.1 時間から反発係数を求める

ボールをある高さから自然落下させると、ボールの種類によって一定の高さまではね返る。2mの高さから落として2mはね返れば、これを「反発係数1」であるという。実際には1より小さいので、比較的良好に弾むゴルフボールを使って反発係数を求める。その際、はね返った高さを測るのではなく、バウンドに要する時間をストップウォッチで測定しようというのである



弾むボールは実際には上図の左のようにほとんど同じ場所ではねるが、時間軸を横にとって同図右のようにあらわすとき、ボールの跳ね返りを順に第1, 2, 3, …バウンドと呼ぶことにする。第1, 2, 3, …バウンドに要する時間を、それぞれ t_1, t_2, t_3, \dots と測定したとして、反発係数 r をどのように求めるかを考えよう。

高さ h から自然落下する物体の t 秒後の高さ $x(t)$ は、 $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ だから、地上に落ちるのは、 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 秒後。

¹Natalya Vinogradova and Larry G. Blaine “Exploring the Mathematics of Bouncing Balls”, Mathematics Teacher, Vol.104, Number 3, Oct.2010

第1バウンドの初速を v_1 とすると、その時点から t 秒後の高さは $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 t$ と表せるので、再び地上に落ちるのは $t = \frac{2v_1}{g}$ 秒後で、これが t_1 になる。

このちょうど半分、 $t = \frac{v_1}{g}$ のとき最高点に達するので、その高さは、

$$x\left(\frac{v_1}{g}\right) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_1}{g}\right)^2 + v_1 \cdot \frac{v_1}{g} = \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{これが } h_1 \text{ である。}$$

一方、 $t_1 = \frac{2v_1}{g}$ より $v_1 = \frac{gt_1}{2}$ だから、 $h_1 = \frac{1}{2g}\left(\frac{gt_1}{2}\right)^2 = \frac{gt_1^2}{8}$ 。よって、

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}。 \text{同様にして、 } t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}}, \quad t_3 = 2\sqrt{\frac{2h_3}{g}} \dots$$

ここで、反発係数の意味から、 $h_1 = rh$, $h_2 = rh_1 = r^2h$, $h_3 = rh_2 = rh^3, \dots$ と考えてよいので、

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2rh}{g}}, \quad t_2 = 2\sqrt{\frac{2rh}{g}} \cdot \sqrt{r}, \quad t_3 = 2\sqrt{\frac{2rh}{g}} \cdot (\sqrt{r})^2, \dots$$

となる。したがって、 $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \sqrt{r}$ となる。つまり、 r は $\frac{t_2}{t_1}$ などの時間の比の2乗であることが分かった。

1.2 第1～第4バウンドの時間の測定

最初の高さを 2m として、ボールが床をヒットする音をよく聞きながら、第1～第4バウンドの時間をストップウォッチで測定する。ストップウォッチの性能にもよるが、普及しているものを使う場合、第1～第4バウンドはそれぞれ別の人が測るほうがよい。12回測定し、最大値と最小値を省いて10回の平均を求める。たとえば次のような表を埋めることになる。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	10回平均
第1バウンド													
第2バウンド													
第3バウンド													
第4バウンド													

グラフ電卓の STAT-Edit 機能を使えば平均だけでなく標準偏差など、1変数統計量を得ることもできる。

つぎに、 $\frac{t_2}{t_1}$, $\frac{t_3}{t_2}$, $\frac{t_4}{t_3}$ を求めて次のような表を作成し、反発係数 r の推定値を出す。

	t_2/t_1	t_3/t_2	t_4/t_3	平均
比				
比 ²				

2 最初の9バウンドの合計時間

これも12回測定し、最大値と最小値を省いて10回の平均を求める。たとえば次のような表を埋めることになる。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	10回平均
9バウンド計													

理論値を求めてみよう。 t_1, t_2, \dots に関する先ほどの式から、 n 回バウンドする時間の合計は等比数列の和の公式を用いて求めることができる。

$$T_n = 2\sqrt{\frac{2rh}{g}}\{1 + \sqrt{r} + (\sqrt{r})^2 + \dots + (\sqrt{r})^{n-1}\} = 2\sqrt{\frac{2rh}{g}} \cdot \frac{1 - (\sqrt{r})^n}{1 - \sqrt{r}}.$$

さて、 $r = XX$ と仮定して、2mの高さから落とした最初の9回のバウンドの合計時間を求めると、

$$T_9 = 2\sqrt{\frac{2 \cdot XX \times 2}{9.8}} \cdot \frac{1 - (\sqrt{XX})^9}{1 - \sqrt{XX}} = \triangle\triangle\triangle \text{ (秒)}$$

となる。

3 静止するまでの合計時間

これも12回測定し、最大値と最小値を省いて10回の平均を求める。たとえば次のような表を埋めることになる。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	10回平均
静止するまで													

理論値を求めてみよう。総時間を無限級数の和を用いて計算する。

$$T_{\text{total}} = 2\sqrt{\frac{2rh}{g}} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{r}}.$$

$r = XX$ と仮定して、2mの高さから落としたとすると、

$$T_{\text{total}} = 2\sqrt{\frac{2 \cdot XX \times 2}{9.8}} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{XX}} = \triangle\triangle\triangle \text{ (秒)}$$

となる。

4 ボールバウンスと導関数の探究

Mathematics Teacher 誌 (NCTM) に掲載されたいま一つの実践は、「弾むボールと導関数のグラフの描画」²と題する微積分クラスでのもので、前述のものと同じ号に掲載されている。距離測定器 (motion detector) を用いて、ボールの運動を計測し、放物線の学習にとどまらず、時間対高

²Beth Cory “Bouncing Balls and Graphing Derivatives”, Mathematics Teacher, Vol.104, Number 3, Oct.2010

さ、速度、加速度のグラフを探究しようというものである。この実践の特徴は、実測や、グラフ電卓を用いた操作の前に、必ず手作業で予想をさせる点にある。

まず「時間－高さ」のグラフについて、距離測定器を用いた計測とグラフ電卓での表示の前に、生徒にグラフの形状を予想させる。多くの生徒は Fig.1 のような、放物線を並べた形を予想するが、中には Fig.2 のように滑らかな曲線を描く生徒もいるという。

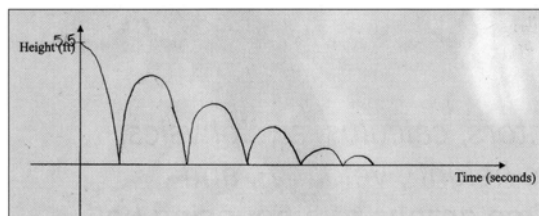


Fig. 1 Most students' height-versus-time graphs indicated sharp points at the x-axis, as this one does.

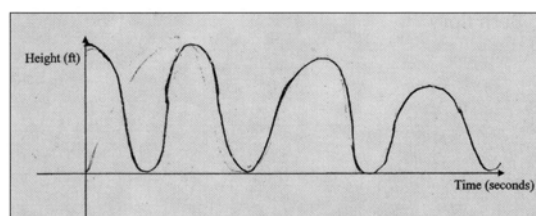
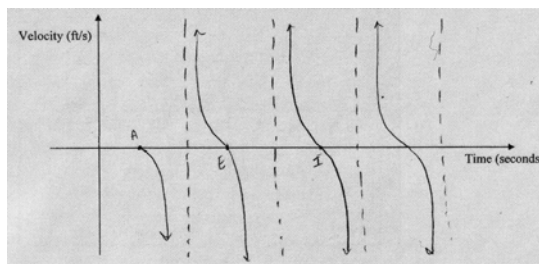
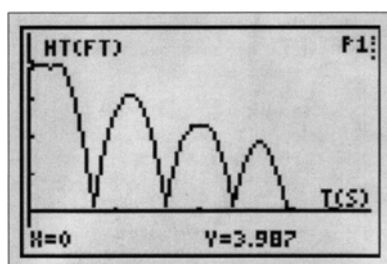
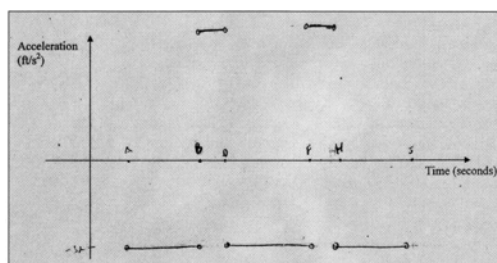
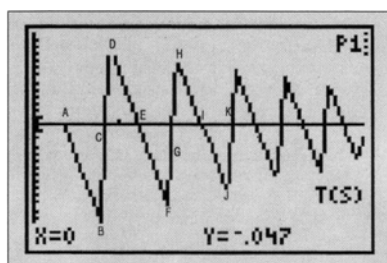


Fig. 2 Some other students' height-versus-time graphs indicated smooth curves at the x-axis.

グラフ電卓用プログラム BALL BOUNCE を用いて、下図左のようなボールバウンスの測定結果を得た後、「時間－速度」のグラフを描くことを試みる。生徒たちは、高さを $H(t)$ 、速度を $V(t)$ 、加速度を $A(t)$ とするとき、すでに $V(t) = H'(t)$ 、 $A(t) = V'(t) = H''(t)$ であることは学んでいる。生徒らはグループに分かれて $V(t)$ のグラフを考える。その際、教員からは「高さ $H(t)$ が増加するとき、その導関数は正か負か?」「 $V(t)$ のグラフはどうなっているか?」「その間、速度の増減はどうか?」などが問いかせられ、グループでの討議を促進する。



その結果、上右図をはじめ多数の予測が登場する。クラス全体でさらに検討し、同じプログラムの機能を用いて「時間－速度」のグラフを表示させる（下図左）。表示されたグラフについて、さらに疑問がないか検討する。



続いて、表示された「時間－速度」のグラフから「時間－加速度」のグラフを予想する。上図右はその一例である。（図はいずれも同論文から）

このように、2次関数を取りだすだけでなく、ボールバウンスの測定結果から導関数や2次導関数を考察させるという点で、発展的な学習を実現していると考えられる。本小論の作成に協力いただいた谷有加さんに感謝します。