# 関数･座標･グラフ

## －グラフを描くときに起こった問題を解決したい—

渡辺　信(生涯学習数学研究所)

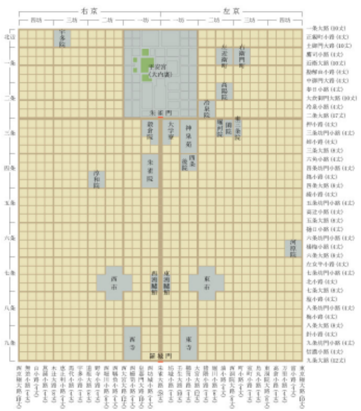
longlifemath@gmail.com

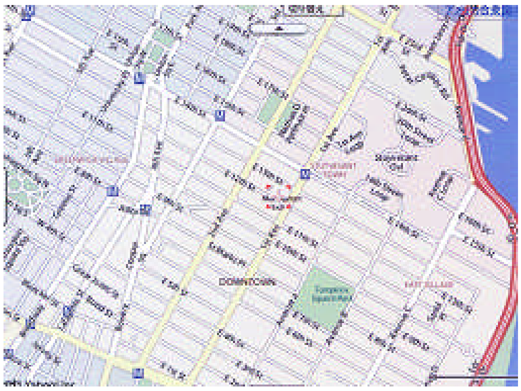
概要　　三角関数を用いて関数の規則･グラフ(合成関数･媒介変数･極座標におけるグラフ)について実際に電卓のグラフを見ながら面白い問題提起する。実際にグラフを描くことを見ていると面白い。規則が抜けた関数の定義、合成関数、媒介変数　そして極座標におけるグラフ。

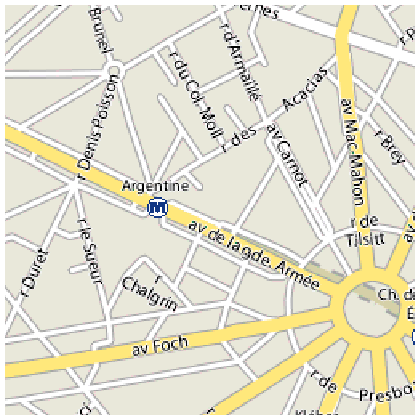
ｙ＝sin(2θ)では葉っぱが 4 枚、ｙ＝sin(5θ)では葉っぱが 5 枚、では葉っぱが 6 枚のグラフを書くことができますか？

テクノロジー（使用機種）ＴＩ－８３

1．街並みの作り方—こんなところに数学がある





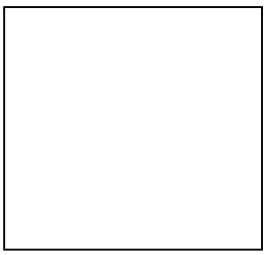



京都の街並み(直交座標)　　　　ニューヨークの街並み(直交座標)　　　　パリの街並み(極座標)

２つ(京都とニューヨーク)の違いはある？

数学は美しいか？

あなたは正方形と長方形、どちらが好きですか？



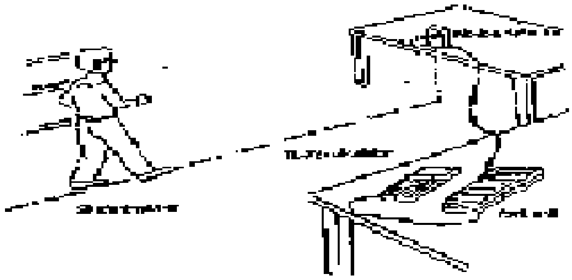
正方形

長方形

## 2．関数のグラフの問題点

(1)この機械では円は描けないでしょ？

この疑問は四国高知での科学の祭典に来た小学生の疑問であった。なぜ描けないのかもわかっていた。しかし、この円は関数であろうか。関数の定義がはっきりと理解できないのはなぜか考えてみたい。ｘに対してｙの値が一つだけ決まることが書かれているが、この定義は教育では無視されている。



(2)単位の長さは

ｙ＝ｘとｙ＝sin ｘを同じ座標軸の中に書くことができるか？ｙ＝ｘのグラフの傾きは１でｘ軸となす角は４５℃ということを知っている。このグラフを書いておいてｙ＝sin ｘを同じ座標軸を用いて書くことができない。おそらく２つのグラフを同時に書く際はｙ＝sin ｘを書いて、その上にいつも書いている傾き１の直線を引く。単位の長さを理解できていないのは、ｙ＝sin ｘの時には度数法で角度を測っている。０から３６０まででサインカーブを書いてから、ｙ＝ｘを書くとグラフが交わってしまう。単位の長さは常にＸ軸とｙ軸で同じになっている。

(3)三角関数　ｙ＝sin ｘとはなに？

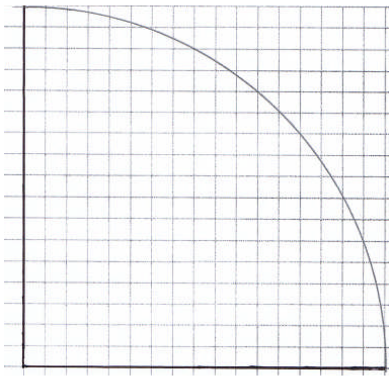
最も美しいと思う分割をして欲しい（線分上に 1 点を加えると 2 つに分割される）

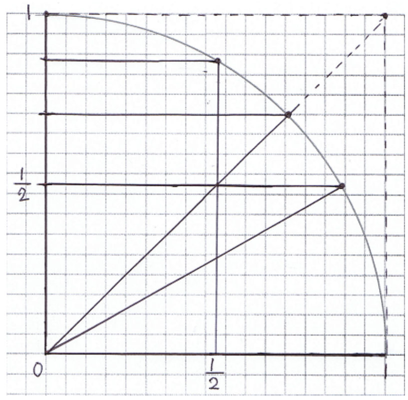
分割では黄金比　(1+√5)/2＝1.62　　白銀比　√２＝1.41

三角関数比の値(特別な角)

| | | | |
|---|---|---|---|
| sin 0° | 0 | cos 0° | |
| sin 30° | 1/2 | cos 30° | |
| sin 45° | 1/√2 | cos 45° | |
| sin 60° | √3/2 | cos 60° | |
| sin 90° | 1 | cos 90° | |

sin は角度ｘからｙ軸への値　cos は？

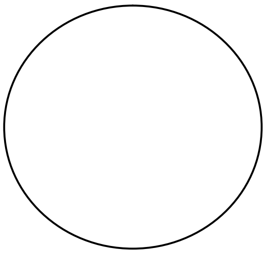




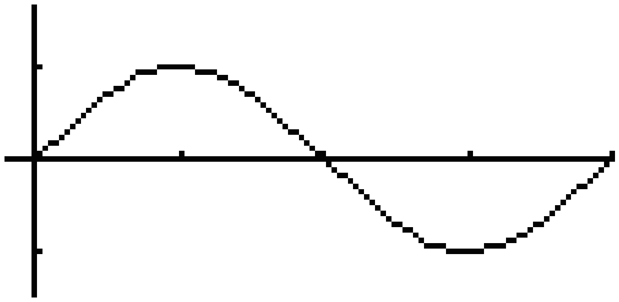

特別角を作る　　美しく４分割　　三角比の値は？

(4)三角関数の規則は不明確

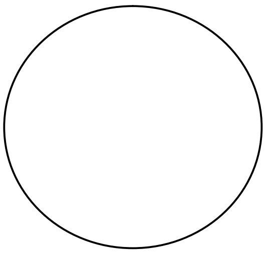
円運動を直線運動に変える規則

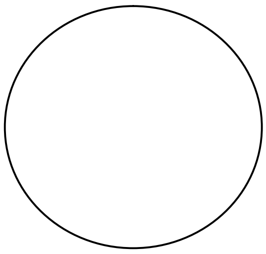


sin(規則)



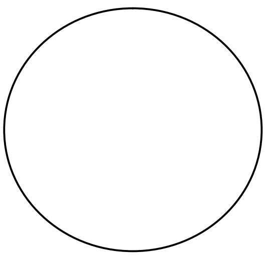
(5)合成関数　 y ＝sin2ｘと y ＝２sinｘ





円運動を直線運動に

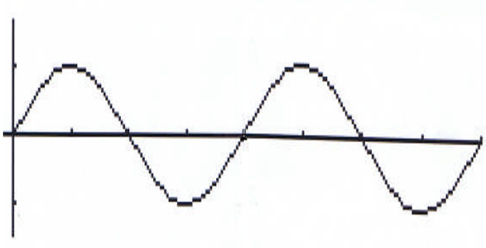
角度ｘ　　動く早さを２倍　(2ｘ)　　y ＝sin(2ｘ)



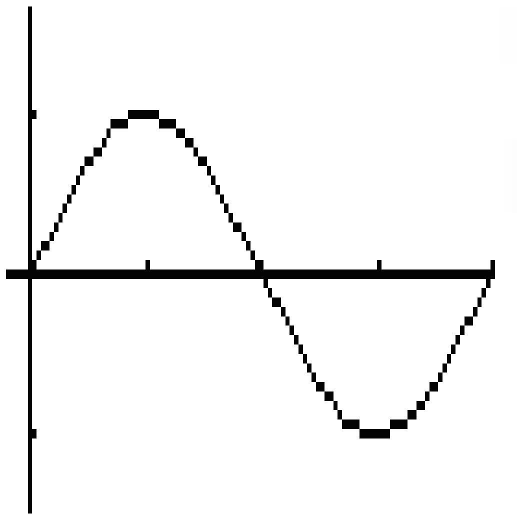
円 運 動 を 直 線 運 動 に　　長さを２倍

角度ｘ　　sin(ｘ)

y ＝２sin　 ｘ

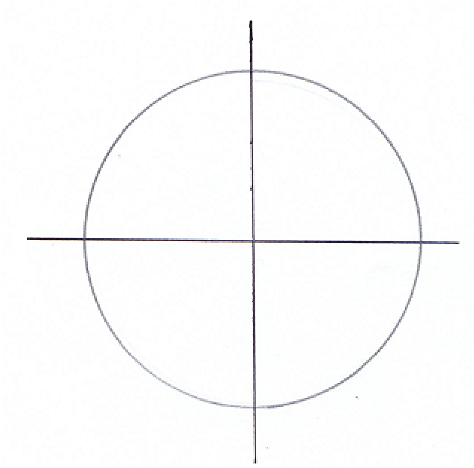


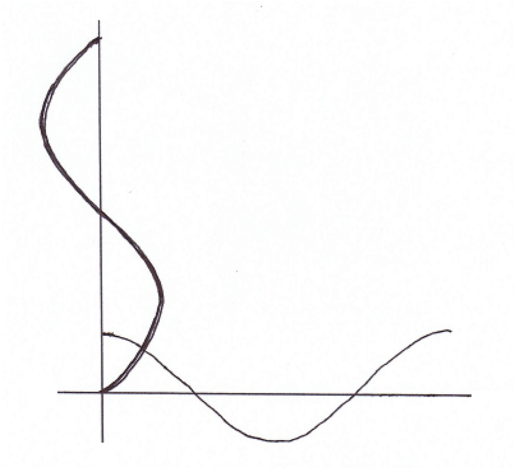
y ＝sin(2 x )

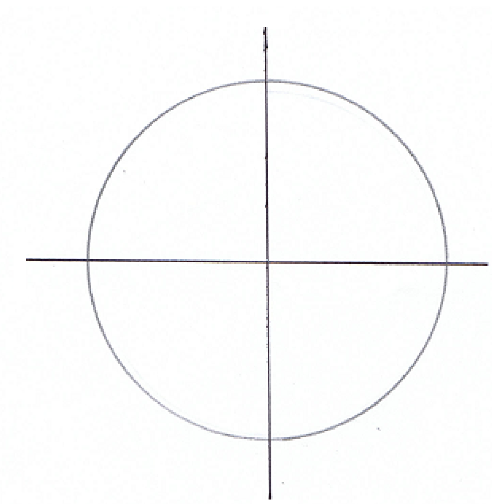


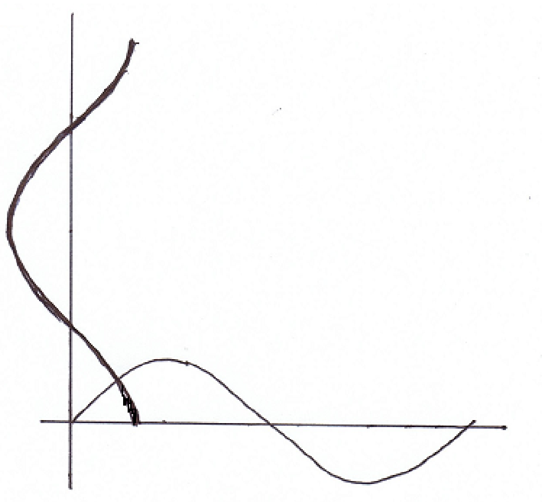
y ＝ 2 sin x

(6)媒介変数　x ＝cos θ　と　x ＝sin θ　との違い？(グラフは単位円)
　　　　　　y ＝sin θ　　　y ＝cos θ

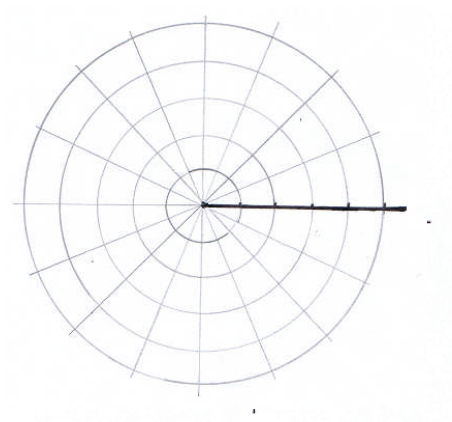








(7)極座標の関数のグラフ



極座標とは？

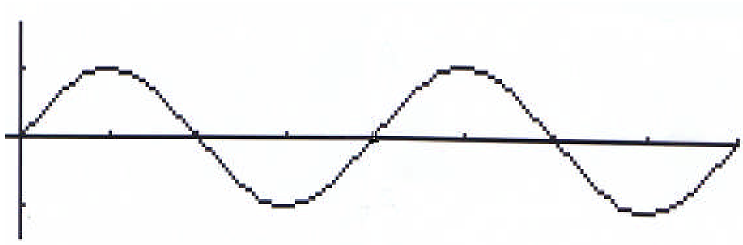
極と始線

座標は距離と角度　（ｒ，θ）

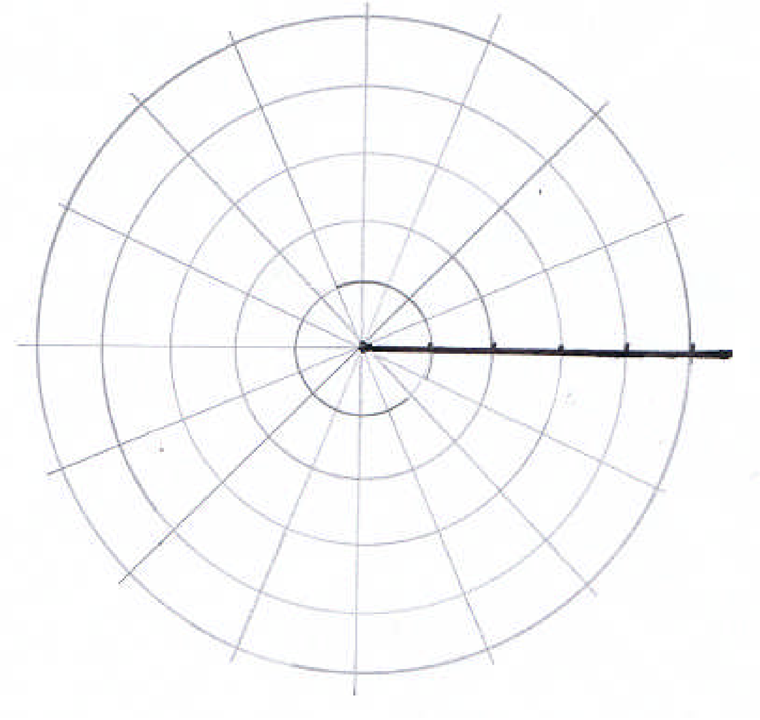
ｒ＝１・・・円

問題　ｒ＝－１になったらどんなグラフを描くのか

ｒ＝sin(2θ)のグラフを書こう



| θ | | r |
|---|---|---|
| 0 | | 0 |
| π/32 | 0.1 | 0.2 |
| π/16 | 0.2 | 0.4 |
| π/8 | 0.32 | 0.6 |
| π/7.5 | 0.46 | 0.8 |
| π/4 | | 1 |
| π/2 | | 0 |
| π/32　＋π/2+π | | -0.2 |
| π/16　＋π/2+π | | -0.4 |
| π/8　＋π/2+π | | -0.6 |
| π/7.5＋π/2+π | | -0.8 |
| π/4　＋π/2+π | | -1 |
| π/2 | | |



問題　次のグラフは描けますか？

r＝sin　θのとき、グラフは葉が１枚

r＝sin2θのとき、グラフは葉が４枚

r＝sin3θのとき、グラフは葉が３枚

r＝sin4θのとき、グラフは葉が８枚

葉の枚数はθの係数が奇数のときは重複して係数枚、偶数のときは 2×係数枚になります。葉の枚数が５枚のグラフを描いてください。

## 3. わからなかったら電卓に聞く

今回の関数とグラフについての問題点を扱った。この様な問題は、わからなかったら電卓を押してみるとよい。電卓が正確な答えを与えてくれるのではなく、考えるヒントを与えてくれる。今回の問題点は電卓にヒントを聞いたことから始まった。

(１)関数は日本人の感覚にはないらしい。そのために関数についいての理解は難しいといわれている。座標軸についても $x-y$ 座標系は簡単に理解していると思い込んでいるが、関数・座標の理解は難しい。特に単位の長さについては常に両軸の長さが同じになっている。$y=x$ の直線は常に $x$ 軸と $45^\circ$ になっている。この長さの単位を変えることは難しい。

(2)関数についての説明は教科書にはほとんどない。その短い説明の中で「$x$ に対して $y$ が一つ決まる」と書いてある。この短い言葉が読み落とされる。規則についてもあまり強調してはいない。関数には $x$ と $y$ があるだけで、規則も地域の値の個数もほとんど触れない。$y$ から元に戻すときに $x$ の値についてはその個数には触れない。$y=x^2$ の逆関数がなぜ $y=\sqrt{x}$ だけで、$y=-\sqrt{x}$ を落とすかの理由があいまいになる。

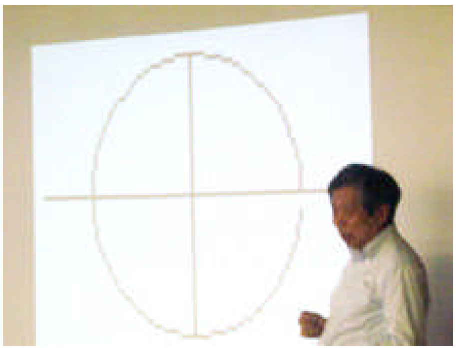
(3)関数の規則の順序の問題もあまり強調されない。$y=\sin(2x)$ と $y=2\sin(x)$ との違いは、規則の順序の問題で、なぜ２を前に出してはいけないかの理由がわからない。合成関数の微分の問題まで規則の順序はわからないままになっている。非線形であることから２が前に出ないということは説明としては難しい。

(４)三角関数では $x=\cos(t)$ とおくことが多い。積分をするときも $\sqrt{(1-x^2)}$ でルートをは外すときにも $x=\cos(t)$ にする。教科書の例題で $x=\sin(x)$ とおくことはない。ルートを外すだけではどちらでもよいのではないかと思う。しかし、何かが違うのはなぜかが問題である。

(5)極座標はほとんど扱わない。しかし、関数のグラフを書くときには、極座標を用いたほうが簡単なグラフがある。今回、単純な疑問として $r$ がマイナスになったらどうするのかを考えた。教科書にはきちんとその規則が書いてあるが、電卓に聞いたらば予想が立つ。始めは $r$ は距離であるからマイナスにはならないと思っていたが、$r=\sin(2x)$ のグラフを書くときには、$r$ がマイナスになっていることに気が付いた。$r=-1$ のグラフを書いてみたら、電卓から答えが出てきた。規則を発見して楽しむことができるが、教科書を丁寧に読むときちんと書いてあった。そこで、グラフを書くとおもしろい。

$y=\mathrm{abs}(\sin(2x))$ で微分不可能な点では、$r=\mathrm{abs}(\sin(2x))$ も微分不可能か？


電卓は考える道具・ヒントを得られる



動きの重要性(教科書では見えないことが可能)