

# 机から転げ落ちる球の運動

北海道教育大学教育学部函館校 松木貴司

机の上を転がっている球の速度が小さくなると、机のへりから転がり落ちた後の球の速度の水平成分が大きくなることをフォトゲートを使い観測した。机のへりを中心とした回転運動により、このような現象が生じることが確認できた。

キーワード: 物理実験    グラフ電卓    CBL    Photogate    デジタルカメラ

## 1 はじめに

斜面を転がり落ちる球の運動は物理学の入門実験としてよく知られている。さらに斜面から水平運動に移った後の速度などを力学的エネルギーの保存則などを使って求めることもある。また、台や机の上を運動をしている球が机や台の端から落下するような運動も演習問題でもよく取り上げられている。

P. Beeken<sup>1)</sup> は実験台のへりから転げ落ちる球の運動について、面白い現象を報告した。特に、実験台から床に球が転がり落ちたときの速度の水平成分の大きさが、実験台上での球の水平成分の大きさよりも大きくなっていることを学生実験のデータから見つけた。実験台上での球の初期速度が大きくなると、この現象が消失した。Beeken はこれらの現象について力学的な考察を行い、球が実験台のへりで滑らずに回転することが要点であることを明らかにした。すなわち、球が床に落下した時、球の水平成分の速度が一定であるとして予測される落下位置よりも遠くまで到達することが実験台のへりでの球の回転により説明された。

この現象は球の速度が比較的小さい場合に観測され、実験台のへりを転げ落ちるときに球が実験台から「キック (蹴飛ばされる (比喩的に))」されたためであることが示された。

この報告は、よく知られている現象においても、より詳しい検討をすることで学部学生が実際われわれの身のまわりで起こっている現象をより深く理解できる可能性を示している。

高校物理では机の上を転がっている球の速度と机から落下している時の速度の水平成分は同じ値になると学習している。しかし実際は机の上を転がっている球の速度より落下している球の速度の水平成分のほうが値が大きくなることもあることを、簡単な装置を利用して初等物理学の範囲で研究することが可能であることが示された。

また様々な大きさの球を用いたり、円柱などの物体についても、それらの物体の速度がある条件の範囲で水平成分の速度が速くなっているのを確かめることができる。

M. E. Bacon<sup>2)</sup> はこの現象を球が台の端から離れる直前には滑ることを考慮することで、より測定データを再現できることを示した。その測定ではビデオ録画により球の回転運動を詳しく調べたことを報告していた。

われわれもデジタルカメラの動画撮影機能を利用して球の回転運動を撮影し、その動画を静止画に変換して、球の回転角を測定することにより回転速度を見積もることを行った。

## 2 理論

Beeken が示した解析を簡略化して示す。図 1 は

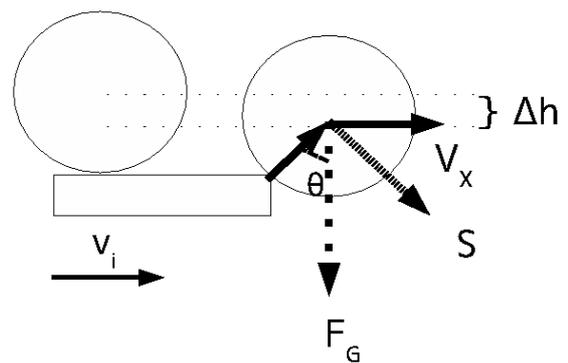


図 1: 机のかどの球の状態

球が机の上を転がったのち、机のへりを回転している様子を模式的に示したものである。机の平面上での速度を初速度  $v_i$  として、机のへりでの水平方向の速度成分を  $v_x$ 、球の重心に働いている重力  $F_G$ 、球が机のへりを回転しているときの球の重心の接線

方向速度を  $S$ 、球が机のへりから回転した角度を  $\theta$  としている。

球が机の上を転がっているときの全エネルギーは並進運動エネルギーと回転運動エネルギーの和となる。球が机のへりを中心として回転しているとき、球の重心位置が下がることにより、その位置エネルギー分だけ全エネルギーが増加する。このとき重心が下がる距離を  $\Delta h$  とし、机の上での球の全エネルギーにこの位置エネルギーを加えたものが、机のへりで弧を描くように動く球の回転運動のエネルギーを等しいとおくと

$$mg\Delta h + \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{edge}}\left(\frac{S}{R}\right)^2 \quad \dots(1)$$

となる。ただし、球の質量を  $m$ 、球の半径を  $R$ 、球の初速度を  $v_i$ 、球の角速度を  $\omega$ 、球の慣性モーメントを  $I(=2mR^2/5)$ 、机のへりを中心として回転運動をしている球の慣性モーメントを  $I_{\text{edge}}(=7mR^2/5)$  とする。

$\Delta h$  は図 1 の中で定義されている角度  $\theta$  を使って表し、さらに  $I(=2mR^2/5)$  や  $I_{\text{edge}}(=7mR^2/5)$  の慣性モーメントを使って、

$$S^2 = \frac{10}{7}g(R - R\cos\theta) + v_i^2 \quad \dots(2)$$

となる。

球が机のへりで回転運動をするのに必要な向心力は机のへりからの球の重心方向への垂直抗力と重心から机のへりへ向かう重力の成分である。球が机から離れたとすると、机のへりからの球の重心方向への垂直抗力はゼロになるので、球が机のへりから離れたときの球の重心の接線方向の速度を  $S_f$  として

$$mg\cos\theta = m\frac{S_f^2}{R} \quad \dots(3)$$

となる。(2) と (3) を使い  $\cos\theta$  を求め、これを (2) 式に代入して

$$S_f = \sqrt{\frac{10gR + 7v_i^2}{17}} \quad \dots(4)$$

が得られる。球が机のへりから離れるときの速度の水平成分の速さ  $S_{fx}$  が以下のように求まる

$$S_{fx} = \frac{1}{gR} \left( \frac{10gR + 7v_i^2}{17} \right)^{\frac{3}{2}} : v_i^2 < gR \quad \dots(5)$$

(5) 式より、初速度がゼロに近づくと、落下する球の速度の水平成分が机からのキックによりあるゼロでない値をもつことが分かる。すなわち、落下する球の速度の水平成分は式 (6) となる。

$$S_{fx} = \left( \frac{10}{17} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{gR} \quad \dots(6)$$

また、初速度が十分に大きくなると、机のへりで球がすべって回転しないので、角度  $\theta$  がゼロに近づく。これは球が机のへりでの速度の増加をとまわずに机から離れることになる。球の初速度が十分大きいと、すなわち  $v_i = \sqrt{gR}$  になると、球の最終の水平速度が初速度と同じになることがわかる。

以上により落下している球の速さの水平成分はテーブルの上を転がっている球より速くなることが示された。

## 3 測定と結果

### 3.1 測定器具

金属球の軌道が一定となるように、球を転がす台にモール(電気配線を保護する部材)やアルミ・チャンネルを利用した。フォトゲートは LED(Peak at 880 nm) を使った経過時間計測器である。

- 金属球を転がす実験台(モールやアルミ・チャンネル)
- 金属球(直径 2.0 や 2.5 cm など)
- グラフ電卓, CBL 2, Photogate, Datagate(Photogate 専用プログラム)
- デジタルカメラ(Casio EX-F1)
- ffmpeg(動画変換ソフト), gimp(画像データの読み取りに利用したソフト)

この測定では、Photo gate (Vernier) と CBL 2, グラフ電卓を利用して初速度測定を行った。机のへりを離れた後の球の速さは、机から球の落下時間を使い球が床に落ちた位置より求めたり、落下中の球の速度を Photo gate で測定した。後者の場合は任意の高さで落下中の最大速度を測定し、水平成分の大きさを求めた。

このようにしてモールやアルミ・チャンネルの上を転がっている金属球とそこから落下した球の速度の水平成分を測定した。デジタルカメラのハイス

ビデオムービーの機能を利用して金属球の運動状態を撮影し、回転速度の計測に利用した。この動画データを静止画に変換して、球の回転角度を読み取った。

### 3.2 測定結果

図2は直径が2cmの球がモール上から転がり落ちたときの測定結果である。初速度が0.20 m/sま

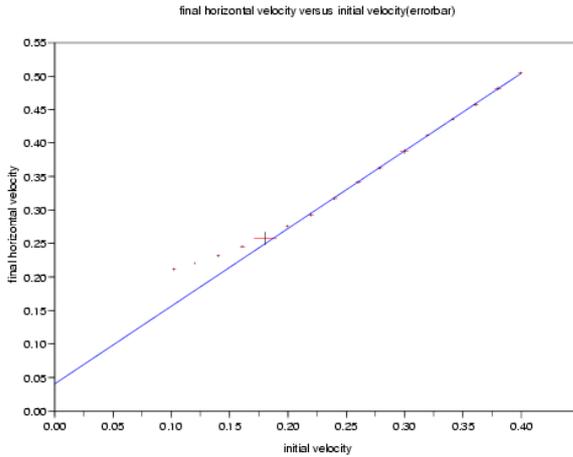


図2: 球の初速度と落下中の球の速度の水平成分

では最終速度の水平成分の方が大きくなっている。また、この図には初速度が比較体大きい場合の、初速と最終速度が一致したときの直線を表している。初速度がゼロの場合、落下する球の速度の水平成分

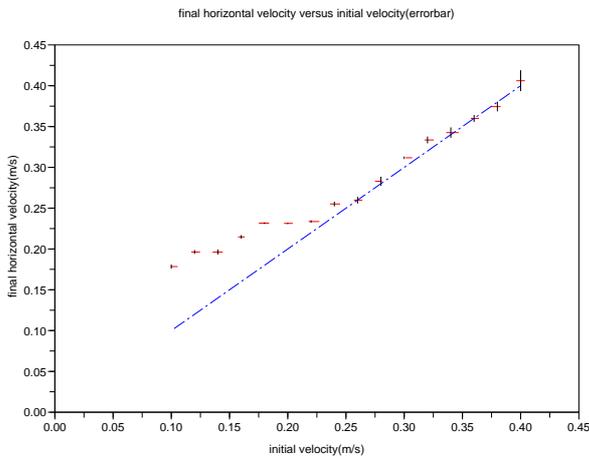


図3: 球の初速度と落下中の球の速度の水平成分

が(6)式より予測される、0.16 m/s に近づいていることがわかる。初速度と終速が一致する場合の直線は原点を通過するはずであるが、原点を通過していない。この問題はアルミ・チャンネルを滑走台にすることで解決した。図3は直径が2.5 cmの金属球がアルミ・チャンネルを転がり落ちたときの測定結果である。この結果から、初速度と終速が一致する場合の直線が、ほぼ原点を通過しているのがわかる。プラスチック製のモールが柔らかく、球の台上での回転運動に影響をしていたものと考えられる。

$v_i = \sqrt{gR}$  から、球の直径が2.5 cmと重力加速度より初速が0.35 m/sより大きいと、台のへりでの回転が起きない条件になる。図3では0.30 m/s程で初速と終速が同じ程度になっていることが分かる。

図4、図5は金属球の回転運動を撮影した動画から静止画に変換したものである。図5は図4から



図4: モール上の球の回転状態(1)

1/40 s後の金属球の回転状態を取り出したものである。球の回転角を測定するため、金属球の半分を黒くぬり、球の回転状態を容易に識別できるようにして撮影を行った。これらの図に示されているよ



図5: モール上の球の回転状態(2)

うに、画像ソフトを使い色のついている部分と付いていない部分の境目や基準となる水平面の方に線分を描き分かりやすくしている。このように、画像変換ソフトの機能を利用して球の回転運動による回転角の変化を読み取った。

図6は初速度を0.1 m/sとして、回転させたときの球の回転角の変化を示したものである。これらは、図4や図5などの画像から回転角を読み取り時間経過を示したものである。傾きが異なる二本の直線に測定データがよくのっている。傾きの小さい直

線は  $6.2 \text{ rad/s}$  を示し、この値と球の半径から初速度が  $0.08 \pm 0.02 \text{ m/s}$  となり実験条件を再現している。また、球がアルミ・チャンネルを離れる約  $0.025 \text{ s}$  ほど

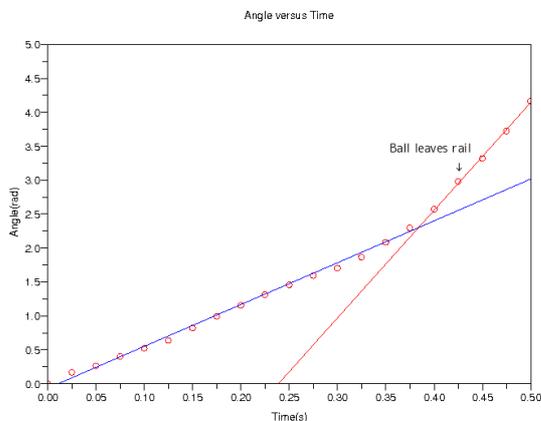


図 6: 球の回転

ど前から球の回転の角速度が増加していることが分かる。これは、球がアルミ・チャンネルのへりを中心として回転することを示している。

## 4 まとめ

金属球がモールやアルミ・チャンネル上を転がっているときの速度の水平成分よりも空中を落下しているときの速度の水平成分  $v_x$  が速くなっている領域があることを確かめることができた。球の大きさを変えても同じような結果を得た。この速度の変化は円柱を転がしたときも同じ傾向になることが確認できた。円柱を転がしたときのほうが、球を転がしているときよりもこの傾向が顕著に現れていた。

金属球がアルミ・チャンネルのへりを離れる直前に、球の角速度の増加が観察された。初速度が  $0.4 \text{ m/s}$  ほどでは角速度の増加はほとんど観測されなかった。初速度を  $0.1 \text{ m/s}$  より小さくすると角速度の増加が顕著に観測された。終速度の水平成分が初速度よりも大きくなる境界の値と差が生じている。測定結果で述べたように、なんらかの原因で終速度の水平成分を大きく見積もっていて、角速度の測定の結果との違いが表れたとも考えられる。アルミ・チャンネル上を転がる金属球の実際の回転半径を考慮する必要もある。さらに、画像データからの回転角の読取りの不確かさも詳しく検討する必要がある。

これらの定量的議論を深めるためためには、試料の種類 (さまざまな球や円柱の形状) を多くしたり、

金属球を転がす器具の改良やデータ分析の手法の改良も必要である。また、回転センサーを利用して、机のへりでの金属球の回転速度を実際に測定するなどを検討している。

このように、十分によく知られている現象においても、比較的簡単な測定器具を利用している場合でも、より詳しい検討を加えることで学生が実際われわれの身のまわりで起こっている現象をより深く理解できる可能性がある。このような簡単な現象の例を数多く学生実験の中に採り入れることを導入したいと考えている。

## 5 参考文献

- 1) P. Beeken, “Ball on the Edge”, *The Physics Teacher* **42** No 6, pp.366-368 (2004)
- 2) M. E. Bacon, “How balls roll off tables”, *Am. J. Phys* **73** No 8, pp.722-724 (2005)