

Cabri 3D を使って立体感覚を養成 II

—大学入試立体問題を素材に—

小森恒雄
Naoco Inc.

数学の大学入試問題の中でも立体問題は難問が多く、イメージをつかみにくくて限られた時間内では解答が書きにくい分野の1つです。Cabri 3D を使って立体に慣れ親しめば、立体感覚が養え、問題に対して見通しも立てやすくなります。本セクションでは大学入試問題を素材に、四面体の外接円の中心が存在することの証明へのヒント、線分を z 軸の周りに回転させた曲面や、円板を回転させたときの立体を扱います。

1. 四面体の外接球

次の問題は今年(2011年)の京大理系前期6番の入試問題で、四面体の外接球が存在することを証明するものです。

空間内に四面体 ABCD を考える。このとき、4つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ。

あまりに当然のことで、何を証明すればよいのか戸惑う問題です。素直に考えると、「3頂点 A, B, C を通る球はいくつもある、それらの球の中心は3頂点 A, B, C から等距離にある直線上…、そのうち4番目の点 D を通る球は確かに1つある…」このように考えて、参考書や予備校の解答は次のように展開するものが多いようでした。

[解答]

$\triangle ABC$ の外心を通り、 $\triangle ABC$ に垂直な直線を l とする。

◀直線 l に着目しました。直線 l 上の任意の点から3頂点 A, B, C へは等距離です。

また、AD の中点を通り、AD に垂直な平面を π とする。

$\pi // l$ とすると $AD \perp l$ となり、ABCD が四面体であることに反するから、 $\pi // l$ である。

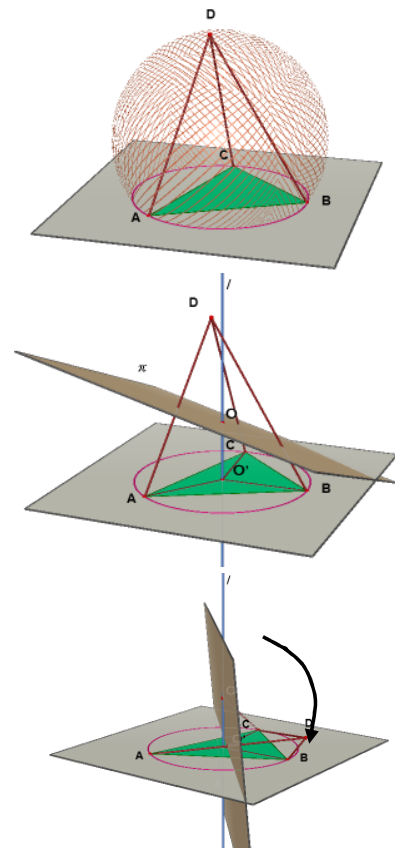
よって、 π と l は交点をもつ。

◀頂点 D が平面 ABC に近づくとき、 $\pi // l$ となって確かに四面体は存在しません(右下図)。

その交点を O とすると、

$$OA = OB = OC = OD$$

となるから、O を中心として A を通る球面は題意をみたす。



- 三角形の外心は 3 つの頂点から等距離にある点です。これは各辺の垂直 2 等分線の交点として作図します。四面体の外心は 4 つの頂点から等距離にある点です。空間では、2 つの点から等距離にある点の集合である「垂直 2 等分面」を作図すれば、外接球の中心が求められます。実際に Cabri 3D で作図してみます。

Note : 垂直2等分面ツールは、ツールバーの左から5番目のツールボックスにあります。2点を指定(クリック)することにより、2点を結ぶ線分を垂直に2等分する平面を作図します。

[作図]

1. まずは四面体を作図します。右から 3 番目のツールボックスにある四面体ツールを使います。

Note : ベース平面上に3頂点を指定し、第4の頂点はベース平面外へShiftキーを押しながらカーソルを移動して作図します。四面体の面は透明にし、見やすくします。これは右クリックにより出すメニューから「面のスタイル」を選択し、塗りつぶしなしにします。

2. 垂直 2 等分面ツールを選択し、2 点 A, B を指定すると、辺 AB の垂直 2 等分面が作図されます。

Note : ラベル A, B, … は左端のツールボックスにある「操作」ツールにより頂点を選択した後、英字をキーボードから入力します。

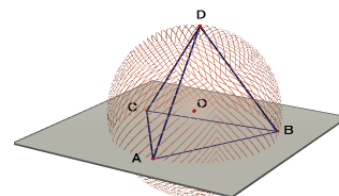
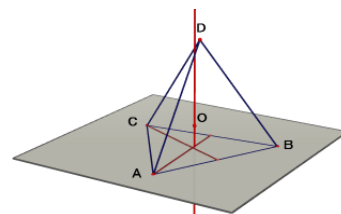
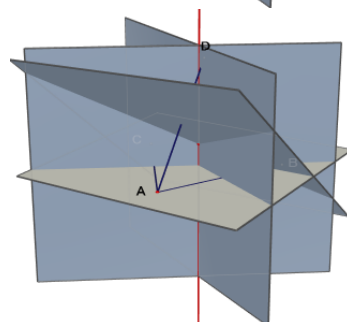
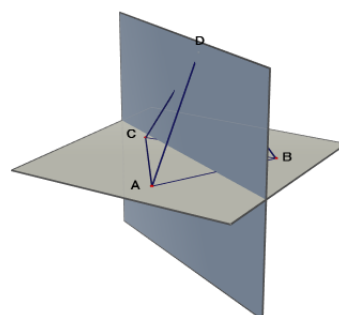
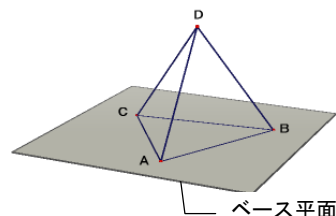
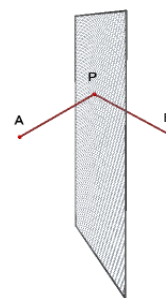
3. 同様に 2 点 A, C を指定して辺 AC の垂直 2 等分面を作図し、さらに 2 点 A, D を指定すれば、3 つの垂直 2 等分面が作図されます。

4. 3 つの垂直 2 等分面の交点 O を求めます。左から 2 番目にあるツールボックスの交点ツールを選択し、3 つの垂直 2 等分面を指定すれば、交点(=外心) が出現します。

5. 作図の足場となった 3 つの垂直 2 等分面を非表示にします。

Note : 非表示にするには、垂直2等分面を選択し、右クリックにより出るメニューから「表示/非表示」を選択します。

- このように作図してみると、底面の $\triangle ABC$ の 2 辺の垂直 2 等分面の交線（前ページ解答の直線 l ）に着目すればよいことが分かります。この交線は底面の $\triangle ABC$ の外心を通り、しかも $\triangle ABC$ に垂直で、直線上の点から 3 頂点 A, B, C への距離は等しくなっています。この作図のような流れで証明している解答もありました。



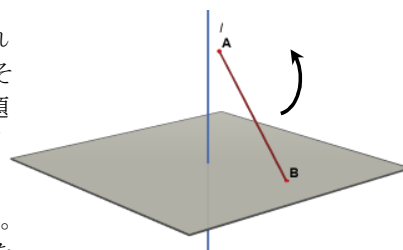
2.線分の回転

任意の傾きの線分を直線の周りに回転させたとき、きれいな曲面が出現します(一葉双曲線といわれるものです)。その曲面で囲まれた立体の体積を求める問題は大学入試問題で頻出です。ここでは Cabri 3D を使ってその曲面を作図し、体積を求める考え方を体得します。

回転軸 l に中心をおく 2 つの円を半径 4cm で作図します。2 つの円は 4cm の距離にあるようにします。この円周上を線分 AB が動きます。線分の長さは 8cm にします。

[作図]

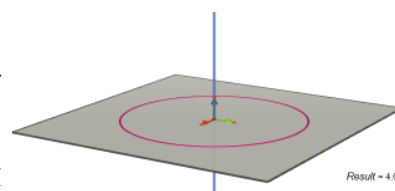
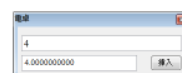
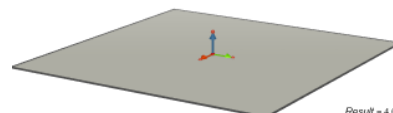
1. 計算ツールを開いて、適当なところに数値 4.00 を用意します。



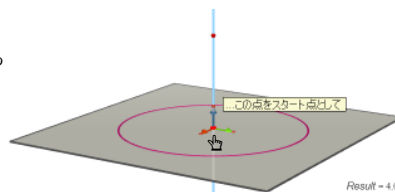
2. 直線ツールによりベース平面に回転軸 l を作図します。基本ベクトル k (z 軸) を含むように作図します。

Note : ベース平面とは画面中央の灰色の平面のことで、Cabri 3D を起動したときや、新規ドキュメントを開いたときに現れる、作図のベースとなる平面です。基本ベクトル i, j, k はそれぞれ原点 O を始点とする x 軸, y 軸, z 軸方向のベクトルで、大きさは 1cm です。

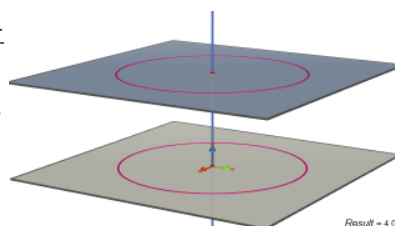
- 円ツールを選択して、①ベース平面、②半径として数値 4.00、③中心としてベース平面と回転軸 l の交点を指定します。1 つ目の円が描けました。



3. 数値ぶんの移動ツールを使って、回転軸 l 上に原点から上のほうに 4cm の点を取ります。

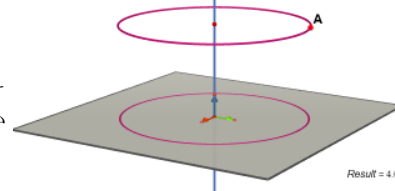


4. ベース平面に平行な平面を 3. で作図した点を通るように作図します。平行ツールを使います。その上に半径 4cm の円を作図します。2 つ目の円です。



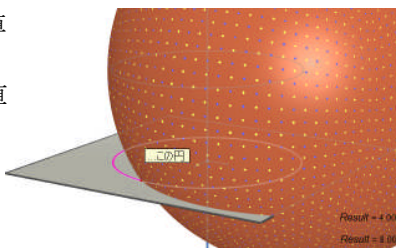
5. 上の平面は非表示にしておきます。上の円周上、適当なところに点ツールを使って点 A を作図します。

Note : 作図が複雑になったとき、不要な図形は非表示にしておきます。機能は生きていますが、見えなくするだけです。図形を選択して、右クリックにより出るメニューから表示/非表示を選択します(あるいはポインタツールにしてから図形を選択し、 $Ctrl+M$ と押します)。

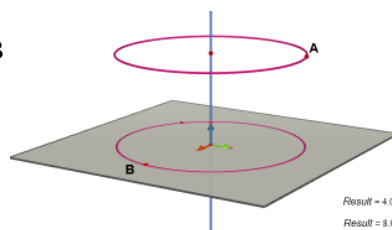


6. 長さ 8cm の線分 AB を作図するため、数値 8.00 を計算ツールで画面に用意します。
球ツールを選択して、中心に点 A を指定し、半径に数値 8.00 を指定します。

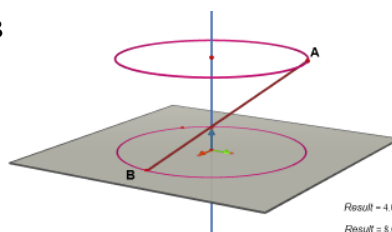
Note : 球ツールを平面図形の作図におけるコンパスのように使っています。



7. 交点ツールを選択して球とベース平面を指定します。2つの交点が出現しますが、1つの交点だけを選択して点 B にします。
球は非表示にします。

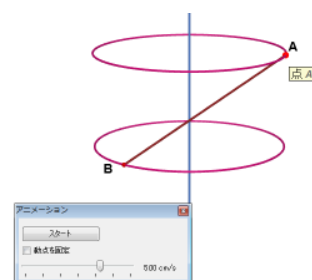


8. 線分ツールを選択して 2 点 A, B を指定すれば、線分 AB が作図され、準備完了です。



9. アニメーションウインドウを開きます。操作ツールを選択してから、点 A を選択します。スライダーをクリックして点 A の動くスピードを秒速 5.00cm/s ぐらいに設定し、スタートボタンをクリックします。
線分 AB が回転軸 l のまわりを動きます。

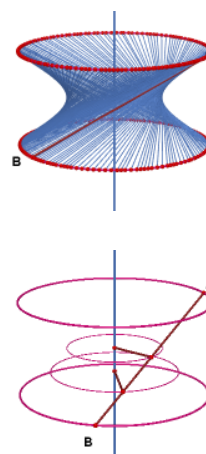
Note : アニメーションをやめるには、スタートボタンがストップボタンに変更されていますから、これをクリックします。



10. 動いた跡を表示するには軌跡ツールを選択して線分 AB を指定します。一葉双曲面が出現します。直線が動いてきれいな曲面が現れることは驚きです。

Note : 軌跡にカーソルを置いてから右クリックすれば、軌跡の残像の長さや太さ、種類(実線、点線など)が変更できます。軌跡を消すには「消去」、軌跡の設定をやめるには「削除」を選択します。

- 線分 AB 上、適当なところに点を取り、その点から回転軸に垂線を引きます。この垂線の長さが回転したときの半径です。線分 AB の中央に位置する点ほど半径の長さが短いことが分かります。
回転体の体積を求めるときは、線分上の任意の点の z 座標と、その半径の長さをパラメータ表示して積分することになります。



3.円板の回転

最後に円板を直線の周りに回転させたときの曲面を作図します。図のように回転軸 l と円板 O を含む平面が平行な場合を作図します。

円板の半径や、円板と回転軸との距離は適当にとります。

[作図]

1. 直線ツールを使ってベース平面に回転軸 l を作図します。基本ベクトル k (z 軸) を含むように作図します。また、円ツールを使ってベース平面上に原点を中心とする適当な半径の円を描きます。

2. 点ツールを使って円周上の適当なところに点 P を作図します。そして、垂直ツールを使ってベース平面に垂直で、点 P を通る垂線 m を描きます。

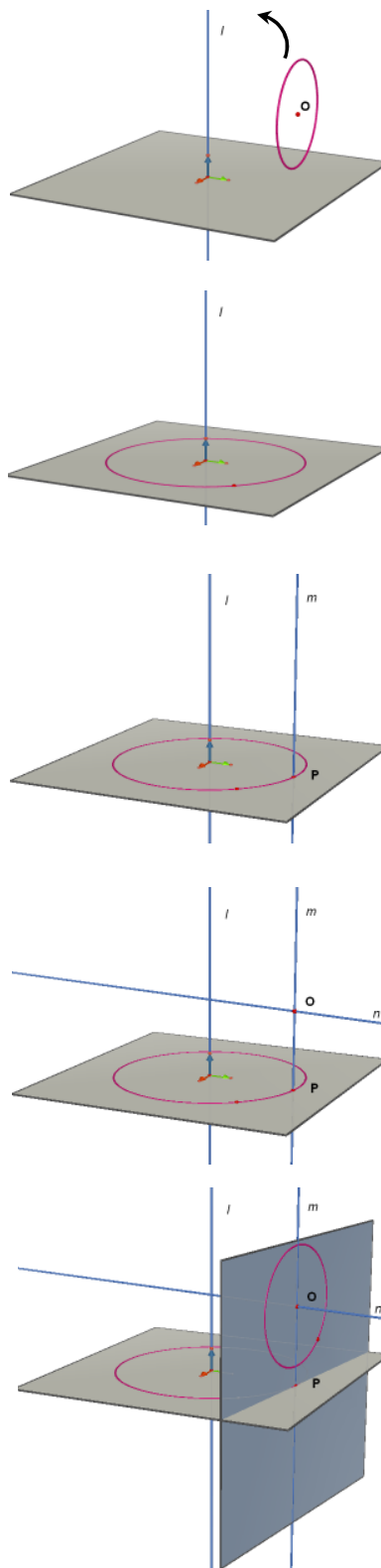
Note : 点 P はあとでアニメーションにより動かす点になります。

3. 垂直ツールを使って回転軸 l に垂直で、直線 m 上の適当なところにとった点 O を通る直線 n を描きます。

Note : 垂直ツールは、①平面に垂直な直線、②直線に垂直な平面、③直線に垂直な直線を作図するツールです。③直線に垂直な直線を作図するときは、Ctrl キーを押したまま、直線と通る 1 点を指定します。

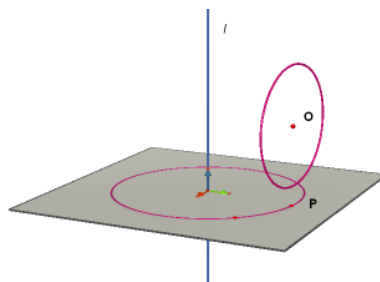
4. 垂直ツールを使って直線 n に垂直で、点 O を通る平面を描きます。その平面上に回転しようとする円を適当な半径で描きます。

Tip : Cabri 3D で作図した図形は視点を変えることにより、いろいろな方向から見るができます。図形がないところで、マウスの右ボタンをドラッグし、マウスポインタが球の十字形になったところで、上下左右に動かせば、視点を変えることができます。



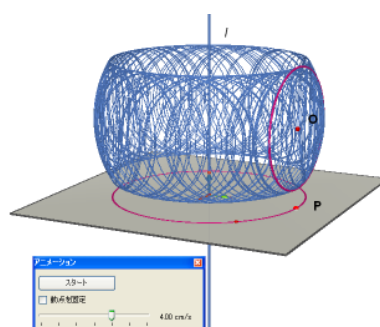
5. 作図の足場を非表示にします。これで準備完了です。

Note : 複数の図形を一気に非表示にするには、操作ツールを選択し、**Ctrl** キーを押しながらクリックして複数の図形を選択します。そして右クリックにより表示/非表示を選択、または **Ctrl+M** と押します。



6. アニメーションウィンドウを開き、操作ツールにしてから点 P を選択します。スライダーをクリックして点 P の動くスピードを秒速 4.00cm/s ぐらいに設定し、スタートボタンを押します。

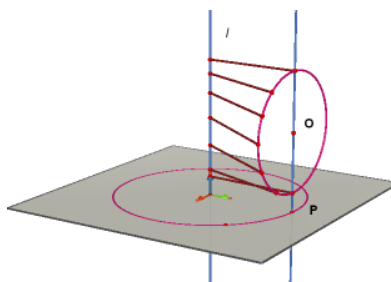
円 O は軌跡ツールにより動いた跡が表示されるようにしておきます。



- 円板の回転体はドーナツの形をした立体になります。中央部は丸みを持ち、ふくらんだようになっています。なぜでしょうか。

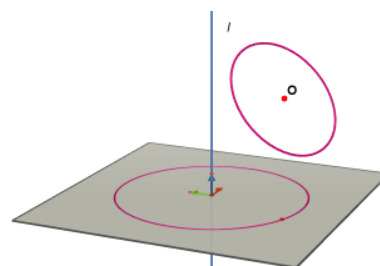
円周上にいくつかの点を取り、それらの点から回転軸 l に垂線を引きます(垂線の長さが回転したときの半径です)。円 O の中央部に位置する点に近づくほど垂線の長さが長くなっていき、中央部で最長であることが分かります。

回転体の体積を求めるときは、円周上の任意の点の z 座標と、その半径をパラメータ表示して積分することになります。

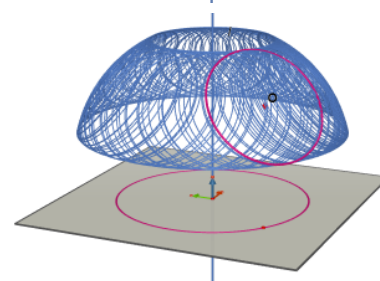


- では、図のように回転軸に対して円板が少し傾いた位置にあるとき、回転体はどのようなになるでしょうか。

円周上にいくつかの点を取り、それらの点から回転軸 l に垂線を引き、形を予測します。



実際に Cabri 3D で描くと右図のような形になります。やはり中央部は丸みを持ち、ふくらんだようになっています。中央部の垂線は円 O の中心から下ろした垂線より長いことより分かります。回転体は形を予測するのが難しい場合が多いのですが、Cabri 3D を使えば検証できます。



[参考] 小森恒雄, Cabri 3D を使って立体感覚を養成, 第 14 回 T³ 年会冊子, 2010